AUFGABENSAMMLUNG — ERGÄNZUNG UND VERTIEFUNG

In manchen Fachrichtungen sind spezielle Problemstellungen zu behandeln. Die vorliegende Aufgabensammlung enthält Material, das keineswegs in allen Abteilungen von Bedeutung ist.

1. Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen

Bei den folgenden Aufgaben ist die Lösungsmenge in $\mathbb{C}$ zu ermitteln!

1. a) $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ **b)** $x^3 - 6x^2 + 10x = 0$ **c)** $x^3 - 10x^2 + 29x = 0$

Anleitung: $x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + 2) = 0$ usw.

2. a) $x^3 + 4x^2 + 5x = 0$ **b)** $x^3 - 5x^2 + 6{,}5x = 0$ **c)** $x^3 - 3x^2 + 27{,}25x = 0$

3. a) $9x^3 - 36x^2 + 52x = 0$ **b)** $4x^3 + 12x^2 + 25x = 0$ **c)** $9x^3 + 6x^2 + 13x = 0$

4. a) $8x^3 + 12x^2 + 17x = 0$ **b)** $16x^3 + 56x^2 + 51x = 0$ **c)** $16x^3 - 64x^2 + 89x = 0$

Gleichungen der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ heißen **biquadratische Gleichungen** und werden durch Substitution auf quadratische Gleichungen zurückgeführt: $x^2 = u$, $x^4 = u^2$

5. a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ **b)** $x^4 - 45x^2 + 324 = 0$ **c)** $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

6. a) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$ **b)** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **c)** $x^4 - 540x^2 + 5819 = 0$

7. a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ **b)** $3x^4 - 29x^2 + 18 = 0$ **c)** $2x^4 - 34x^2 + 32 = 0$

8. a) $4x^4 - 13x^2 + 9 = 0$ **b)** $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ **c)** $12x^4 - 17x^2 + 6 = 0$

Gleichungen der Form $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ bzw. $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$ $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ heißen **symmetrische Gleichungen dritten Grades**. Unter Verwendung der nachstehenden Formeln kann man leicht die Lösungen bestimmen: $u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$ $\quad u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$

9. Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte — auf einem separaten Blatt zu vervollständigen:

$15x^3 - 49x^2 + 49x - 15 = 0$	$3x^3 - 7x^2 + 7x - 3 = 0$
$15x^3 - 15 - 49x^2 + 49x = 0$	
$15(x^3 - 1) - 49x(x - 1) = 0$	

Aus der letzten Gleichung ist $(x - 1)$ herauszuheben; man kann $x^3 - 1$ nach der Formel

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ zerlegen: $(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$(x - 1)[15(x^2 + x + 1) - 49x] = 0$	
$(x - 1)(15x^2 + 15x + 15 - 49x) = 0$	
$(x - 1)(15x^2 - 34x + 15) = 0$	

Ein Produkt ist genau dann gleich null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist:

$x - 1 = 0 \vee 15x^2 - 34x + 15 = 0$	
$L = \left\{1, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}\right\}$	$L =$

Bemerkung: Die Lösungsmenge einer symmetrischen Gleichung dritten Grades hat die Gestalt $\left\{1, x_1, \frac{1}{x_1}\right\}$ oder $\left\{-1, x_1, \frac{1}{x_1}\right\}$. $(x_1 \neq 0)$

Im Hinblick auf Aufgabe **9.** ist zu berechnen:

10. a) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ **b)** $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$

11. a) $3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 0$ **b)** $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$

12. a) $4x^3 + 13x^2 - 13x - 4 = 0$ **b)** $4x^3 - 13x^2 - 13x + 4 = 0$

13. a) $2x^3 - x^2 - x + 2 = 0$ **b)** $7x^3 - 57x^2 + 57x - 7 = 0$

14. a) $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$ **b)** $5x^3 + 31x^2 + 31x + 5 = 0$

> Gleichungen der Form $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ c \in \mathbb{R})$ heißen **symmetrische Gleichungen vierten Grades**. Nach Umformung wird substituiert:
> $\mathbf{x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2}$

15. Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte — auf einem separaten Blatt zu vervollständigen:

$72x^4 + 6x^3 - 181x^2 + 6x + 72 = 0$	$30x^4 + 7x^3 - 110x^2 + 7x + 30 = 0$

Zunächst wird die Gleichung durch x^2 dividiert:

$$72x^2 + 6x - 181 + \frac{6}{x} + \frac{72}{x^2} = 0$$

$$72x^2 + \frac{72}{x^2} + 6x + \frac{6}{x} - 181 = 0$$

$$72\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 181 = 0$$

Setzt man $x + \frac{1}{x} = y$, so ist $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ bzw. $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$:

$$72(y^2 - 2) + 6y - 181 = 0$$

$$72y^2 + 6y - 325 = 0$$

$$\vdots$$

$$y_1 = \frac{25}{12},\ y_2 = -\frac{13}{6}$$

Jetzt wird zurücksubstituiert:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{25}{12} \vee x + \frac{1}{x} = -\frac{13}{6}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{L} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right\}$$

Bemerkung: Die Lösungsmenge einer symmetrischen Gleichung vierten Grades hat die Gestalt $\left\{x_1, \frac{1}{x_1}, x_2, \frac{1}{x_2}\right\}$. $(x_1 \neq 0, x_2 \neq 0)$

Im Hinblick auf Aufgabe **15.** ist zu berechnen:

16. a) $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$ **b)** $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

17. a) $5x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 26x + 5 = 0$ **b)** $2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$

18. a) $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$ **b)** $3x^4 + 4x^3 - 14x^2 + 4x + 3 = 0$

19. a) $8x^4 - 14x^3 - 69x^2 - 14x + 8 = 0$ **b)** $8x^4 + 14x^3 - 69x^2 + 14x + 8 = 0$

20. a) $x^4 - \frac{13x^3}{3} + \frac{16x^2}{3} - \frac{13x}{3} + 1 = 0$ **b)** $x^4 - \frac{10x^3}{3} + 2x^2 - \frac{10x}{3} + 1 = 0$

21. Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte — auf einem separaten Blatt zu vervollständigen:

Gegeben ist die Lösung x_1 der Gleichung

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0;\ x_1 = 1.$	$x^3 - x^2 + 17x + 87 = 0;\ x_1 = -3.$

Gesucht ist die Lösungsmenge in $\mathbb{C}$!

Hat eine Gleichung dritten Grades die Lösung x_1, so läßt sie sich als Produkt aus dem Linearfaktor

$(x - 1)$

und dem Polynom zweiten Grades $(x - x_2)(x - x_3)$ darstellen!

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ | $|:(x + 3)$

$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6 = 0$

$-\underline{(x^3 - x^2)}$

$-5x^2 + 11x$

$\underline{-(-5x^2 + 5x)}$

$6x - 6$

$-\underline{(6x - 6)}$

0 Rest

Die quadratische Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ läßt sich in die Linearfaktoren $(x - 2)(x - 3)$ zerlegen.

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

somit gilt: $\mathbf{x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3}$

Probe! $L = \{1, 2, 3\}$

Im Hinblick auf Aufgabe **21.** und das nachstehende Struktogramm ist zu berechnen:

22. $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,\ x_1 = 4$

23. $2x^3 - 8x^2 + 11x - 5 = 0,\ x_1 = 1$

24. $15x^3 - 49x^2 + 49x - 15 = 0,\ x_1 = \frac{5}{3}$

25. $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

Anleitung: Der Koeffizient von x^3 ist gleich 1, die ganzzahligen Lösungen müssen ein Teiler des absoluten Gliedes der Gleichung sein[1]. Das absolute Glied ist 2, die Teiler des absoluten Gliedes sind 1, − 1, 2, − 2. Nun wird das Gleichungspolynom der Reihe nach mit den Teilern belegt ...

26. $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0,\ x_1 = -1$

27. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0,\ x_1 = 4$

28. $12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0,\ x_1 = \frac{2}{3}$

29. $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0,\ x_1 = 1$

Lösung einer Gleichung n-ten Grades

Struktogramm
Auffinden (Erraten) einer Lösung x_i, sofern diese nicht bereits gegeben ist
Dividieren der Gleichung durch $(x - x_i)$
bis Grad = 2
Lösen der quadratischen Gleichung
Aufzählen aller Lösungen

[1]) Das absolute Glied ist ja das Produkt aller Lösungen; jede Lösung ist deshalb Teiler des absoluten Gliedes.

30. Gegeben ist die Lösungsmenge $L = \{1, -2, 0\}$ einer Gleichung dritten Grades. Wie lautet eine solche Gleichung?

31. Einem Kreis mit dem Radius $r = 5\,\text{cm}$ soll ein Rechteck eingeschrieben werden, dessen Flächeninhalt $A = 48\,\text{cm}^2$ ist. Länge l und Breite b dieses Rechtecks?

32. Eine quadratische Säule hat die Maße $a = b = 4{,}00\,\text{dm}$ und $h = 20{,}00\,\text{dm}$.

a) Um wieviel verändert sich das Volumen dieser Säule, wenn die Länge und die Breite um je 1,00 dm vergrößert und die Höhe um 1,00 dm verkleinert wird?

b) Um welche andere Strecke können Länge und Breite vergrößert und die Höhe verkleinert werden, wenn sich die gleiche Volumenszunahme wie in **a)** ergeben soll?

2. Ganzrationale Funktionen höheren Grades

1. Der Graph der Funktionsgleichung $y = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 30$ ist in einem nicht-kartesischen Koordinatensystem (Maßstab: x-Werte, $1 \triangleq 1\,\text{cm}$; y-Werte, $1 \triangleq 1\,\text{mm}$) über $[-3, 4]$ zu zeichnen. Die Nullstellen sind zeichnerisch zu ermitteln. Wie groß ist der Funktionswert an der Stelle $x = 3{,}8$? An welchen Stellen ist der Funktionswert $y = 50$?

Bei den Aufgaben **2.** bis **12.** sind **alle** Nullstellen der durch ihre Funktionsgleichung gegebenen Funktionen **rechnerisch** über $\mathbb{R}$ zu bestimmen. Wenn eine Nullstelle bereits gegeben ist, ist die Richtigkeit dieser Behauptung durch entsprechendes Einsetzen zu überprüfen.

2. a) $y = 5x^4 - 3x^3 - 2x^2$ **b)** $y = 6x^3 + 18x^2 + 12x$

3. a) $y = x^4 - x^2 - 72$ **b)** $y = 3x^4 - 8x^2 + 16$

4. a) $y = x^3 + 3x^2 + 2x + 6$
Anleitung: $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = x^2(x+3) + 2(x+3) = \ldots$

b) $y = 5x^3 - 3x^2 - 20x + 12$
Anleitung: $5x^3 - 3x^2 - 20x + 12 = x^2(5x-3) - 4(5x-3) = \ldots$

5. a) $y = 2x^4 - 8x^3 + x^2 - 4x$ **b)** $y = 5x^3 + x^2 - 45x - 9$

6. a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ **b)** $y = 5x^3 + 31x^2 + 31x + 5$

7. a) $y = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$ **b)** $y = 24x^3 - 49x^2 - 49x + 24$

8. a) $y = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ **b)** $y = 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$

9. a) $y = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ **b)** $y = 24x^4 + 10x^3 - 77x^2 + 10x + 24$

10. a) $y = x^4 - 2x^3 - 2x + 1$ **b)** $y = 2x^4 + 7x^3 + 7x + 2$

11. a) $y = 3x^3 - 17x^2 - 36x + 180$, N (3, 0) **b)** $y = 4x^3 - 15x^2 + 8x + 3$, N (1, 0)

12. a)[1] $y = 3x^4 - 13x^3 + 7x^2 + 17x - 6$, N (3, 0) **b)**[1] $y = 5x^4 - 2x^3 + 2x - 5$, N (1, 0)

13. Gegeben sind $y_1 = 5x^3 + 7x^2 - 11x - 10$, $y_2 = 10x^2 + 9x - 22$, $y_3 = 15x + 110$ und $y_4 = 21x + 42$.

a) $y_2 \cap y_4$?

b) $y_1 \cap y_2$?
Anleitung: Vgl. Zwischenergebnis mit Aufgabe **4.b)**

c) $y_1 \cap y_3$?
Anleitung: $x = 3$ erfüllt die Gleichung
$5x^3 + 7x^2 - 26x - 120 = 0$

d) $y_1 \cap y_4$?
Anleitung: $x = -2$ erfüllt die Gleichung
$5x^3 + 7x^2 - 32x - 52 = 0$

---

[1]) Führt auf eine Gleichung dritten Grades.

14. a) Gegeben sind die Punkte A (0, 1), B (1, − 6), C (− 3, 10) und die Gerade mit der Funktionsgleichung $y_1 = 5x - 5$. Welche ganzrationale Funktion vierten Grades geht durch die Punkte A, B, C und schneidet die Gerade y_1 an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$?

Bemerkung: Eine ganzrationale Funktion vierten Grades hat die Form $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

b) In welchen **weiteren** Punkten S_3 und S_4 schneiden einander die in **a)** gefundene Funktion und die Gerade mit $y_1 = 5x - 5$?

15. Gesucht ist eine Kurve dritten Grades, die die x-Achse bei $x = 2$ und die y-Achse bei $y = 40$ schneidet und die außerdem durch die Punkte A (− 1, 54) bzw. B (1, 14) geht. Alle Nullstellen der gefundenen Funktionsgleichung sind zu ermitteln!

Bemerkung: Erhält man für eine Nullstelle eine Doppellösung, dann ist die x-Achse an dieser Nullstelle Tangente der Kurve.

16. Welche ganzrationale Funktion dritten Grades geht durch die Punkte P_1 (2, 2), P_2 (0, 0), P_3 (1, 4) und P_4 (3, 0)? An welchen Stellen hat diese Funktion den Funktionswert 54?

17. Man bestimme die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion niedrigsten Grades, die durch folgende Punkte geht: P_1 (2, 2), P_2 (6, 18), P_3 (0, 0), P_4 (4, 8).

18. Gegeben: $y = 4x^3 + 8x^2 - 3x - 9$

a) Die Kurve ist über [− 3, 2] zu zeichnen. (Maßstab: x-Werte, 1 ≙ 1 cm, y-Werte, 1 ≙ 1 mm)

b) Nullstellen?

c) Die Schnittpunkte der Kurve mit $y_0 = 5x - 5$ sind zu berechnen, das Resultat ist anhand der Zeichnung zu überprüfen.

d) Welche ganzrationale Funktion niedrigsten Grades geht durch die Punkte A (− 1, − 5), B (1, − 7), C (2, 13) und D (0, − 9)?

e) Die Schnittpunkte der in **d)** ermittelten Funktionsgleichung mit $y = 4x^3 + 8x^2 - 3x - 9$ sind zu berechnen.

Bemerkung: Wenn ein berechneter Schnittpunkt eine Doppellösung ist, dann ist das kein „echter" Schnittpunkt, sondern ein Berührungspunkt.

3. Nichtlineare Gleichungssysteme

1. a) $x^2 - 5y^2 = 4$; $3x + 5y = 6$

b) $2x^2 - xy + y^2 = 23$; $5x - 3y = -19$

c) $x^2 - xy + y^2 = 19$; $2x - 3y + 13 = 0$

2. a) $\frac{10}{x} - \frac{3}{y} = 5$; $(x + 3y) : (x + 3) = 1 : 4$

b) $\sqrt[x]{4} \cdot \sqrt[y]{8} = 4$; $\sqrt[x]{2} \cdot \sqrt[y]{2} = \sqrt[6]{32}$

Anleitung: Es ist jeweils eine Potenz zur Basis 2 zu bilden!

c) $2^x \cdot 5^{y+1} = 100$; $\frac{3^{x-1}}{5^{y-2}} = 15$

Anleitung: Beide Gleichungen sind zu logarithmieren!

3. a) $3\sqrt{x + y} + 4\sqrt{x - y} = 5$; $5\sqrt{x + y} - 2\sqrt{x - y} = 17$

b) $\sqrt{x + \sqrt{y}} = 4$; $\frac{3x}{2} - \frac{7y}{4} = 14$

c) $\sqrt[x]{25} = \frac{5}{\sqrt[y]{125}}$; $2x = y + 2$

4. a) $3x^2 - 16y^2 = 44$; $x^2 + 20y^2 = 21$

b) $16x^2 - 9y^2 = 12$; $4x^2 - 3y^2 = 0$

c) $3x^2 - 2y^2 = -38$; $2x^2 + 5y^2 = 133$

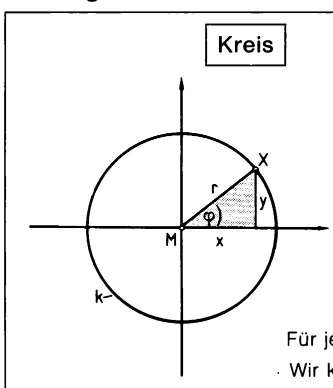
5. a) $5x^2 + 3y^2 = 272$; $3x^2 - 7y^2 = 84$

b) $3\sqrt{2x - y} - 2\sqrt{3y - 2x} = 6$; $4\sqrt{2x - y} + 3\sqrt{3y - 2x} = 8$

c) $8^{2x-y} \cdot 4^{x-y} = 0{,}5$; $15^{5x} \cdot 3^{3y} - 3^{10x} \cdot 5^{3y} = 0$

4. Kegelschnitte

Kreis



Mittelpunktsgleichung des Kreises:

$$x^2 + y^2 = r^2$$ (Warum?)

Aus der Mittelpunktsgleichung des Kreises erhält man durch Umformung:

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ..... für den oberen Halbkreis

$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ ..... für den unteren Halbkreis

Definition:

Die Menge k aller Punkte der Ebene, welche von einem festen Punkt M gleichen Abstand r haben, heißt **Kreis** mit Mittelpunkt M und Radius r:
$k = \{X \mid \overline{XM} = r\}$

Für jeden Winkel φ gilt $x = r \cdot \cos\varphi$ bzw. $y = r \cdot \sin\varphi$.
Wir können für den Kreis daher folgende Parameterdarstellung angeben: k: $\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases}$

1. Liegt der Punkt **a)** $P_1\,(1,2)$, **b)** $P_2\,(-2,0)$ auf dem Kreis $k: x^2 + y^2 = 4$? (Rechnerische Begründung!)

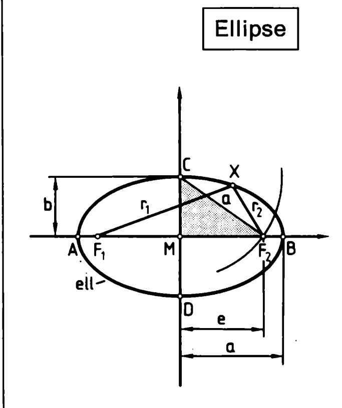
2. Man ermittle die Gleichung jenes Mittelpunktskreises, der durch den Punkt **a)** A (3, − 4), **b)** B (− 8, − 15) geht.
Bemerkung: Mittelpunktskreise sind Kreise, deren Mittelpunkte im Ursprung liegen.

3. Die Schnittpunkte S_1 und S_2 des Kreises k mit der Geraden g sind zu bestimmen!

a) $k: x^2 + y^2 = 34,\ g: 4y + x - 17 = 0$ **b)** $k: x^2 + y^2 = 1369,\ g: 23y - 47x = 136$
c) $k[M(0,0), r = 25],\ g: 9y = -13x + 125$ **d)** $k: x^2 + y^2 = 61,\ g[X(4,17), Y(7,-16)]$

4. Durch den Punkt $P_1\,(-7, y > 0)$ des Kreises $k: x^2 + y^2 = 65$ ist eine Sehne zu ziehen, welche den Anstieg $k = -1$ hat. Die Gleichung der Sehne und die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes sind zu berechnen!

Ellipse



Bezeichnungen:

M	..... Mittelpunkt
X	..... Ellipsenpunkt
F_1, F_2	..... Brennpunkte
A, B	..... Hauptscheitel
C, D	..... Nebenscheitel
r_1, r_2	..... Leitstrahlen (Brennstrahlen)
$\overline{AB} = 2a$	..... Hauptachse
$\overline{CD} = 2b$	..... Nebenachse
a, b	..... Halbachsen ($a, b \in \mathbb{R}^+$)
e	..... lineare Exzentrizität

Parameterdarstellung der Ellipse:
ell: $\begin{cases} x = a \cdot \cos\varphi \\ y = b \cdot \sin\varphi \end{cases}$

Definition:

Die Menge ell aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten (Brennpunkten) konstant und größer als die Entfernung der Brennpunkte ist, heißt **Ellipse**:
$ell = \{X \mid (\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a) \wedge (2a > \overline{F_1F_2})\}$

Mittelpunktsgleichung der Ellipse: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$ (Vgl. Aufgabe 14.)

Aus dem grün eingezeichneten Dreieck MF_2C folgt: $e^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow e = \sqrt{a^2 - b^2}$

5. Die Funktionsgleichung für die **a)** obere **b)** untere Ellipsenhälfte ist allgemein, in expliziter Form anzugeben.

6. Liegt der Punkt **a)** K (6, 4) **b)** L (4, − 3) auf der Ellipse ell: $4x^2 + 7y^2 = 256$? (Rechnerische Begründung!)

7. Man ermittle die Mittelpunktsgleichung der Ellipse, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt:
a) $a = 5, b = 8$ **b)** $b = 4, e = 3$

8. Gesucht ist die lineare Exzentrizität der Ellipse ell!

a) ell: $9x^2 + 25y^2 = 900$ **b)** ell: $25x^2 + 81y^2 = 2025$

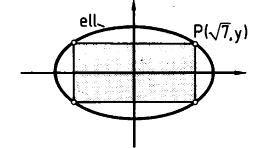
c) ell $[M(0,0),\ a = 2\sqrt{5},\ P(4,1)]$ **d)** ell $[M(0,0),\ b = \frac{10}{3},\ Q(-4,2)]$

9. Die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Ellipse ell mit der Geraden g sind zu bestimmen!

a) ell: $4x^2 + y^2 = 100$, $g: y = 14x - 50$ **b)** ell: $x^2 + 4y^2 = 169$, $g: 3y = -x + 13$

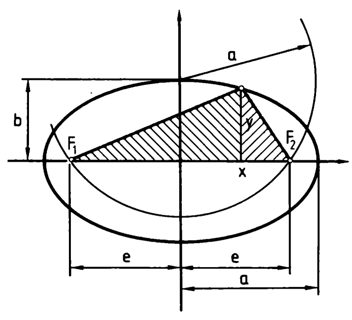
c) ell: $x^2 + 4y^2 = 25$, $g\,[Q(1,0),\ k = -0{,}5]$ **d)** ell: $4x^2 + y^2 = 100$, $g\,[P_1(0,0), P_2(-3,-8)]$

10. Der Ellipse ell: $9x^2 + 16y^2 = 144$ ist ein Rechteck mit der Seitenlänge $l = 2\sqrt{7}$ einzuschreiben. **a)** Flächeninhalt A **b)** Umfang u des Rechtecks?



11. Der Ellipse ell: $2x^2 + 3y^2 = 20$ ist ein Quadrat einzuschreiben. **a)** Flächeninhalt A **b)** Umfang u des Quadrats?

12. Die Schnittpunkte des Kreises $k: x^2 + y^2 = 9$ mit der Ellipse ell $[M(0,0),\ a = 6,\ b = 2)]$ sind zu berechnen.



13. Wie lautet die Mittelpunktsgleichung der Ellipse, die durch die Punkte A (15, 16) und B (20, 12) geht?

Bemerkung: Der Mittelpunkt der gesuchten Ellipse soll im Ursprung liegen.

14. Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist herzuleiten!

Anleitung: $\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a$ bzw. $\sqrt{(e + x)^2 + y^2} + \sqrt{(e - x)^2 + y^2} = 2a$

Durch Umformungen erhält man $a^2(a^2 - e^2) = (a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2$

Wegen $a^2 - e^2 = b^2$ ergibt sich ...

Hyperbel

Bezeichnungen:

M ..... Mittelpunkt
X ..... Hyperbelpunkt
F_1, F_2 ..... Brennpunkte
A, B ..... Hauptscheitel
C, D ..... Endpunkte der Nebenachse
r_1, r_2 ..... Leitstrahlen (Brennstrahlen)
$\overline{AB} = 2a$ ..... Hauptachse
$\overline{CD} = 2b$ ..... Nebenachse
a, b ..... Halbachsen ($a, b \in \mathbb{R}^+$)
e ..... lineare Exzentrizität

Parameterdarstellung der Hyperbel:[1])

$$\text{hyp: } \begin{cases} x = a \cdot \cosh \varphi \\ y = b \cdot \sinh \varphi \end{cases}$$



Definition:

Die Menge hyp aller Punkte der Ebene, für die der Betrag der Differenz der Entfernung von zwei festen Punkten (Brennpunkten) konstant und kleiner als die Entfernung der Brennpunkte ist, heißt **Hyperbel**:

$\text{hyp} = \{X \mid (|\overline{XF_1} - \overline{XF_2}| = 2a) \wedge (2a < \overline{F_1F_2})\}$

Mittelpunktsgleichung der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

(Vgl. Aufgabe **23.**)

Aus dem grün eingezeichneten Dreieck MBT folgt: $e^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow e = \sqrt{a^2 + b^2}$

15. Die Funktionsgleichung für die **a)** oberhalb **b)** unterhalb der x-Achse liegende Hyperbelhälfte ist allgemein, in expliziter Form anzugeben.

16. Liegt der Punkt **a)** $P(-4,5)$ **b)** $Q(3\sqrt{13}, 6)$ auf der Hyperbel hyp: $4x^2 - 9y^2 = 144$? (Rechnerische Begründung!)

[1]) In dieser Parameterdarstellung treten sogenannten Hyperbelfunktionen auf — vgl. Seite 265f.

17. Man ermittle die Gleichung der Hyperbel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt: **a)** $a = 3, b = 7$ **b)** $a = 12, b = 8$

18. Aus den gegebenen Mittelpunktsgleichungen der Hyperbel hyp, sind die Länge der Halbachsen und die Koordinaten der Brennpunkte zu ermitteln!

a) hyp: $9x^2 - 16y^2 = 144$ **b)** hyp: $64x^2 - 225y^2 = 14400$

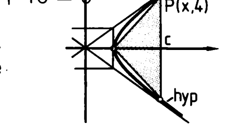
c) hyp: $576x^2 - 49y^2 = 1764$ **d)** hyp: $1{,}69x^2 - 70{,}56y^2 = 119{,}2464$

19. Die Menge S der Schnittpunkte der Hyperbel hyp mit der Geraden g ist zu bestimmen!

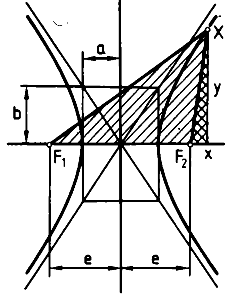
a) hyp: $4x^2 - 5y^2 = 64$, g: $6x - 5y - 16 = 0$ **b)** hyp: $x^2 - y^2 = 16$, g: $y - 7x - 32 = 0$

c) hyp: $x^2 - 9y^2 = 144$, g: $3y + x = 0$ **d)** hyp: $x^2 - y^2 = 64$, g: $y - x + 16 = 0$

20. Dem einen „Ast" der Hyperbel hyp: $x^2 - 3y^2 = 1$ ist ein gleichschenkeliges Dreieck ($c = 8$) derart einzuschreiben, daß die Dreiecksspitze im Hauptscheitel liegt und die Basis c parallel zur y-Achse verläuft.



21. In welchen Punkten schneiden einander die Hyperbel hyp: $441x^2 - 25y^2 = 225$ und die Ellipse ell: $9x^2 + 25y^2 = 225$?



22. Die Gleichung der Hyperbel ist aufzustellen:

a) M (0, 0), $a = 5$, P (7, 3) **b)** M (0, 0), $F_1(-10, 0)$, $P(4, 8\sqrt{2})$

c) M (0, 0), $P\left(5, \frac{3}{2}\right)$, Q (4, 0) **d)** M (0, 0), X (5, 3), $Y\left(-\frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right)$

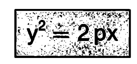
23. Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel ist herzuleiten!
Anleitung: $|\overline{XF_1} - \overline{XF_2}| = 2a$ bzw. $|\sqrt{(e+x)^2 + y^2} - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}| = 2a$
Durch Umformungen erhält man $x^2(e^2 - a^2) = a^2(e^2 - a^2) + a^2y^2$ usw.

Parabel

Bezeichnungen:
A ..... Scheitel
X ..... Parabelpunkt
F ..... Brennpunkt
l ..... Leitlinie
a ..... Parabelachse
p ..... Parameter

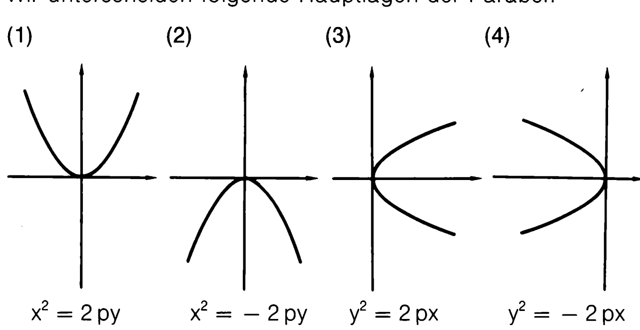
Definition:
Die Menge par aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt (Brennpunkt) und einer Geraden (Leitlinie) gleichen Abstand haben, heißt **Parabel**:
par = $\{X \mid \overline{XF} = \overline{Xl}\}$

Scheitelgleichung der links dargestellten Parabel:



(Vgl. Aufgabe **35.**)

24. Wir unterscheiden folgende Hauptlagen der Parabel:



a) Was geschieht, wenn man (1) bzw. (2) an den Geraden $y = x$ spiegelt?

b) Welcher Hauptlage entspricht die Parabel par: $y = -x^2$?

c) Algebraisch erhält man die „Umkehrparabel" von **(1)** bzw. **(2)**, indem man ...?

25. Liegt der Punkt **a)** $S_1(6,3)$ **b)** $S_2\left(\frac{1}{18}, \frac{2}{3}\right)$ auf der Parabel $x^2 = 12y$? (Rechnerische Begründung!)

26. Die Scheitelgleichung der Parabel mit $S(0,0)$ ist jeweils zu bestimmen:

a) $p = 5$, Parabel rechts offen **b)** $p = 3$, Parabel links offen

c) $p = 1$, Parabel unten offen **d)** $p = 1{,}25$, Parabel oben offen

27. a) Wie lautet die Scheitelgleichung einer Parabel, deren Brennpunkt $F(0,3)$ ist?

b) Wie lautet die Scheitelgleichung einer Parabel, deren Leitlinie die Gleichung $x = 2$ hat?

Bemerkung: Der Scheitel A der Parabel soll jeweils im Ursprung liegen.

28. Die Gleichung der Parabel, deren Scheitel im Ursprung liegt, ist aufzustellen:

a) $l: x = -5$ **b)** $P(-8,5)$ **c)** $F(0,-17)$

29. Die Koordinaten des Brennpunktes der Parabel **a)** $y^2 = 16x$ **b)** $x^2 = 6y$ **c)** $y^2 = 29x$ **d)** $2x^2 = 67y$ sind zu ermitteln!

30. Die Menge S der Schnittpunkte der Parabel par mit der Geraden g ist zu bestimmen!

a) par: $y^2 = 24x$, g: $y + 3x - 6 = 0$ **b)** par: $y^2 = -68x$, g: $70y + 17x = 2091$

c) par$\left[X\left(-4, \frac{4}{7}\right), Y\left(-10, \frac{25}{7}\right)\right]$, g: $4y - x - 14 = 0$ **d)** par$\left[X(3,6), Y\left(\frac{4}{3}, -4\right)\right]$, g$\left[A(3,0), B\left(2, \frac{4}{3}\right)\right]$

31. Der Parabel par: $y^2 = 5x$ ist ein Quadrat derart einzuschreiben, daß seine Diagonale AC auf der x-Achse liegt. Wie groß ist der Flächeninhalt A des Quadrates?

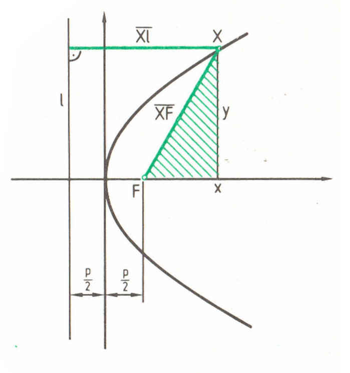
32. Der Parabel par: $y^2 = 6x$ ist ein gleichschenkeliges Dreieck ($h = 4\,\text{cm}$) derart einzuschreiben, daß die Dreiecksspitze im Scheitel der Parabel liegt. Flächeninhalt A des Dreiecks?

33. Gesucht sind die Schnittpunkte der Ellipse ell: $7x^2 + 2y^2 = 25$ mit der Parabel par: $y^2 = 3x$.

34. Man ermittle die gemeinsamen Punkte der Geraden g: $y = 2x - 6$ und der Parabel par: $y^2 = 16x$ und berechne **a)** die Sehnenlänge s **b)** den Sehnenmittelpunkt P **c)** den Abstand d zwischen Sehne und Brennpunkt.

35. Die Gleichung der Parabel mit dem Scheitel $A(0,0)$ und dem Brennpunkt $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $(p \in \mathbb{R}^+)$ lautet: $y^2 = 2px$ Beweis?

Anleitung: $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ usw.

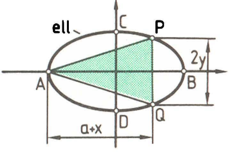


Vermischte Aufgaben

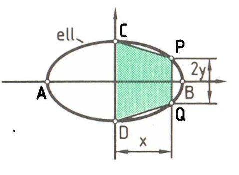
36. Der Ellipse ell: $3x^2 + 4y^2 = 64$ ist ein Rechteck einzuschreiben, dessen Länge doppelt so groß ist wie seine Breite. Flächeninhalt A des Rechtecks?

37. Der Ellipse ell: $3x^2 + 4y^2 = 12$ ist ein gleichschenkeliges Dreieck mit dem Flächeninhalt $A = 4{,}5$ so einzuschreiben, daß die Höhe mit der großen Achse eine gemeinsame Trägergerade hat (vgl. nebenstehende Figur). Wie groß ist der Umfang u des Dreiecks?

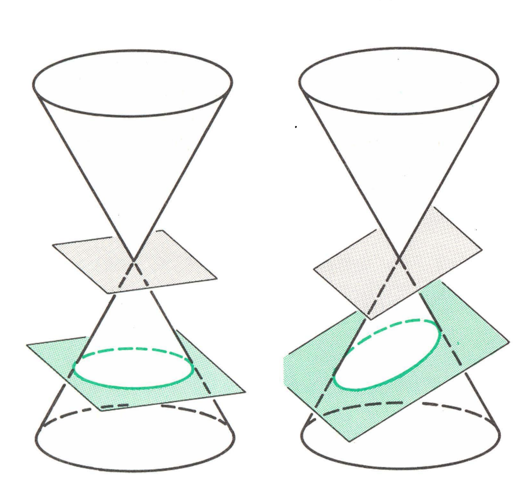
Anleitung: Als mögliche ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^4 + 4x^3 - 16x + 11 = 0$ kommen nur $+1$, -1, $+11$, -11 in Frage. (Warum?)

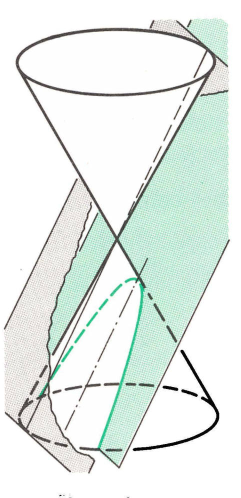


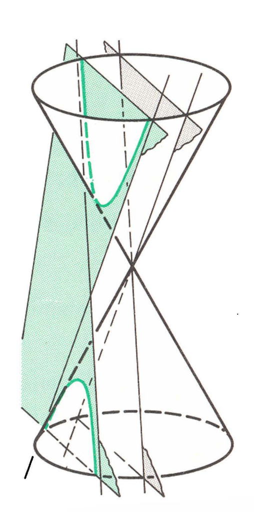
38. Der Ellipse ell: $9x^2 + 4y^2 = 36$ ist das gleichschenkelige Trapez mit dem Flächeninhalt $A = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ so einzuschreiben, daß die Basis des Trapezes mit der kleinen Achse der Ellipse zusammenfällt. Es ist zu zeigen, daß $y_Q = \frac{3}{2}$ die einzige reelle Lösung ist. Der Umfang u des Trapezes ist zu berechnen.



39. Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel werden **Kegelschnitte** genannt, weil man sie als Schnitte einer Ebene mit einem Drehkegel erhält. Die folgenden Figuren sind in diesem Sinne zu interpretieren, und es ist zu erklären, wie der zweite Ast der Hyperbel entsteht!

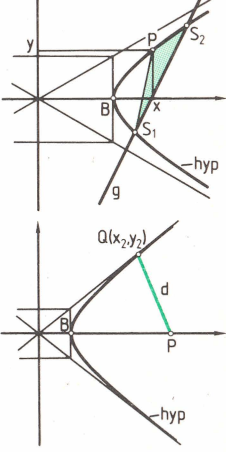






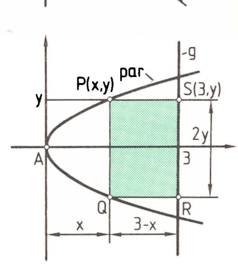
40. Die Gerade $g: 2x - y = 6$ schneidet die Hyperbel $hyp: \frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{4} = 1$ in zwei Punkten S_1, S_2 (vgl. nebenstehende Figur). Über der entstehenden Sehne als Basis ist ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $A = \frac{16(3\sqrt{33} - 11)}{11\sqrt{33}}$ zu errichten, dessen Spitze auf der Hyperbel zwischen S_1 und S_2 liegt. Wie groß ist der Umfang u des Dreiecks?

41. Welcher Punkt $Q(x_2, y_2)$ der Hyperbel $hyp: 4x^2 - 6y^2 = 11$ hat vom Punkt $P(7, 0)$ den Abstand $d = \sqrt{\frac{533}{30}}$?



42. Von der Geraden $g: x = 3$ und der Parabel $par: y^2 = 6x$ wird ein Parabelsegment begrenzt, dem ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $A = 12\sqrt{\frac{2}{3}}$ — wie in nebenstehender Figur gezeigt wird — einzuschreiben ist. Umfang u des Rechtecks?

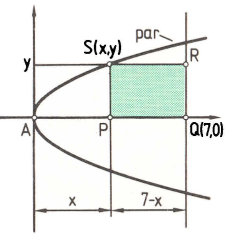
Anleitung: Es ist günstig, y_p zu eliminieren ...



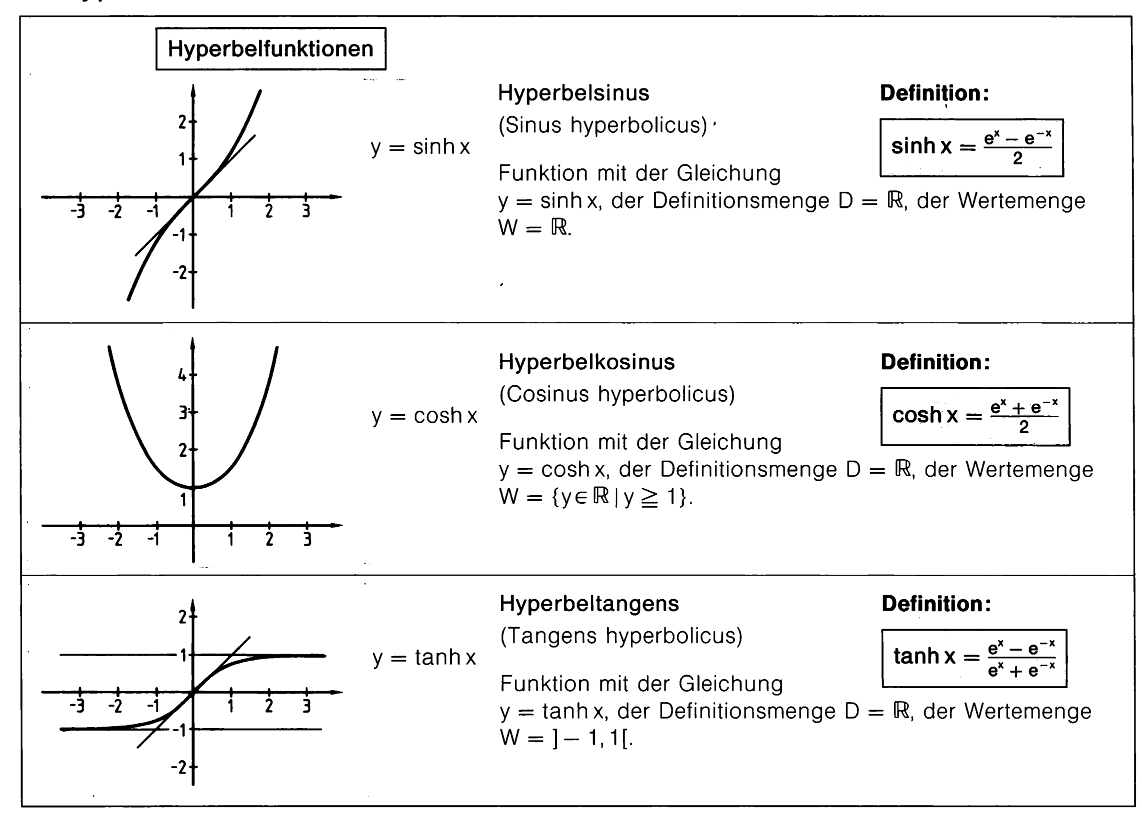
43. Die obere Hälfte der Parabel $par: y^2 = 6x$, die x-Achse und die Ordinate des Punktes $Q(7, 0)$ bilden ein Flächenstück.

Mit welchen Koordinaten ist ein Punkt $S(x, y) \in par$ anzugeben, damit das aus der Parabelfläche herausgeschnittene Rechteck PQRS den Flächeninhalt $A = \frac{14\sqrt{14}}{3}$ annimmt?

Anleitung: Der Punkt S liegt auf der Parabel, also müssen seine Koordinaten $y^2 = 6x$ erfüllen, für die auf dieser Basis erhaltene Gleichung (y eliminieren!) $x^3 - 14x^2 + 49x - \frac{1372}{27} = 0$ läßt sich zeigen, daß es für x_S nur eine Doppelwurzel und eine 4mal so große einfache Wurzel gibt.



5. Hyperbel- und Areafunktionen



Es sind die Werte für x in den nachstehenden Gleichungen zu ermitteln:

1. **a)** $x = \sinh 3{,}8$ **b)** $x = \cosh 1$ **c)** $x = \tanh(-1{,}8)$

2. **a)** $x = \sinh(-2{,}1)$ **b)** $x = \cosh 3{,}4$ **c)** $x = \tanh 0$

3. Welche der Hyperbelfunktionen **a)** $f: x \mapsto \sinh x$ **b)** $g: x \mapsto \cosh x$ **c)** $h: x \mapsto \tanh x$ sind **gerade**, welche sind **ungerade** Funktionen?

4. Der Funktionsgraph von $y = \cosh x$ ist durch Überlagerung der Funktionen mit den Gleichungen $y_1 = \frac{e^x}{2}$ und $y_2 = \frac{e^{-x}}{2}$ zu zeichnen.

Bemerkung: *„Vielleicht meinen Sie nun, der Hyperbelkosinus sei ja als mathematische Konstruktion recht interessant, aber praktische Bedeutung habe er wohl kaum. Dann sind Sie gewaltig im Irrtum! Gehen Sie einmal am frühen Morgen in den Wald, wenn die Sonne noch niedrig steht, und der Tau noch nicht verschwunden ist. Dann sehen Sie gewiß viele Spinnwebfäden, die sich von einem Ast zum anderen schwingen und an denen viele winzige Tautröpfchen glitzern. Sie beschreiben einen Bogen, der ein Teil der Hyperbolischen Kosinuslinie ist. Oder beobachten Sie eine Telegraphenleitung: sie hängt durch und beschreibt wiederum einen solchen Bogen. Der Graph der Funktion $x \mapsto y \mid y = \cosh x$ heißt deshalb oft auch* ***Kettenlinie****. Diese Kettenlinie entsteht immer dann, wenn ein in allen Teilen beweglicher „schwerer" Faden (eine ideale Kette) an zwei Punkten aufgehängt wird und im Schwerefeld frei durchhängen kann."*[1]

5. Text wie Aufgabe **4.** für $y = \sinh x$.

6. Die Funktionen **a)** $f: x \mapsto \sinh \frac{1}{x}$ **b)** $g: x \mapsto \cosh(3x)$ **c)** $h: x \mapsto \tanh x^2 + 1$ sind graphisch zu veranschaulichen.

---

[1]) Aus „Richard KNERR, Mathematik — eine faszinierende Wissenschaft".

7. Folgende Beziehungen zwischen Hyperbelfunktionen sind zu beweisen:
a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ **b)** $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$ **c)** $2 \sinh x \cosh x = \sinh 2x$ **d)** $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

Anleitung: $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \ldots$

8. Unter Verwendung der EULERschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ sind die Beziehungen **a)** $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ **b)** $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ herzuleiten!

Anleitung: In $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ wird φ durch $-\varphi$ ersetzt; man erhält $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi) \Leftrightarrow e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \cdot \sin\varphi$ (warum?), $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \cdot \sin\varphi$ und $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ werden subtrahiert bzw. addiert ...

9. Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und den Hyperbelfunktionen:

a) $\sin ix = i \cdot \sinh x$ **b)** $\cos ix = \cosh x$ **c)** $\tan ix = i \cdot \tanh x$ Beweis?

Anleitung: $\sin ix = \frac{1}{2i}(e^{i^2 x} - e^{-i^2 x}) = \ldots$[1]

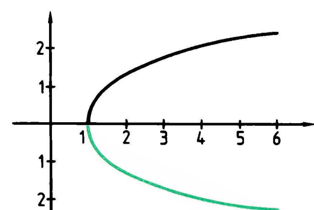
Areafunktionen

Umkehrung Hyperbelsinus
(Area sinus hyperbolicus)

$y = \operatorname{arsinh} x$ ist die Umkehrung der Funktion mit $y = \sinh x$.
$D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(Herleitung vgl. Aufgabe **11.**)

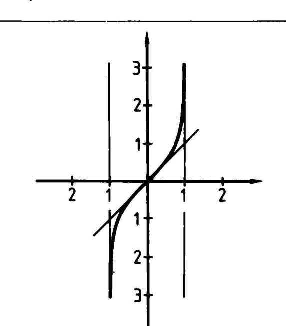


Umkehrung Hyperbelkosinus
(Area cosinus hyperbolicus)

$y = \operatorname{arcosh} x$ ist die Umkehrung der Funktion mit $y = \cosh x$.
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 1\}$, $W = \mathbb{R}_0^+$

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$ [2]

(Herleitung vgl. Aufgabe **10.**)



Umkehrung Hyperbeltangens
(Area tangens hyperbolicus)

$y = \operatorname{artanh} x$ ist die Umkehrung der Funktion mit $y = \tanh x$.
$D =]-1, 1[$, $W = \mathbb{R}$

$$\operatorname{artanh} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$ [3]

(Herleitung vgl. Aufgabe **11.**)

---

[1]) Vgl. Aufgabe **8. a)**.
[2]) Für $x \geqq 1$.
[3]) Für $-1 \leqq x \leqq 1$.

10. Die Umkehrfunktion zu $y = \cosh x$ ist zu entwickeln und graphisch zu veranschaulichen!
Bemerkung: Genaugenommen liefert die Umkehrung von $y = \cosh x$ eine **Relation**, die aus den beiden Ästen $y = \operatorname{arcosh} x$ und $y = -\operatorname{arcosh} x$ besteht.

11. Text wie Aufgabe **10.** für **a)** $y = \sinh x$ **b)** $y = \tanh x$.

Es sind die Werte für x zu den nachstehenden Gleichungen zu ermitteln:

12. **a)** $x = \operatorname{arsinh} 1$ **b)** $x = \operatorname{arcosh} 3$ **c)** $x = \operatorname{artanh} 0$

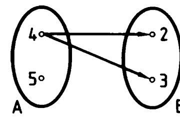
13. **a)** $x = \operatorname{arsinh}(-2)$ **b)** $x = \operatorname{arcosh} 5$ **c)** $x = \operatorname{artanh} 0{,}5$

14. Die Funktionen **a)** $f: x \mapsto \operatorname{arsinh}\frac{1}{x}$ **b)** $g: x \mapsto \operatorname{arcosh}(\cos x)$ **c)** $h: x \mapsto \operatorname{artanh}(x^2 - 1)$ sind graphisch zu veranschaulichen.

6. Eigenschaften spezieller Relationen

Verschiedene Darstellungsformen derselben Relation R:

(1)



(Pfeildiagramm)

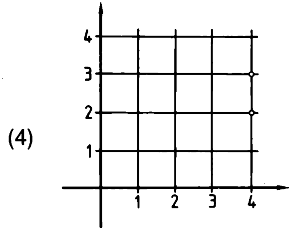
(2) $R = \{(4,2), (4,3)\}$
(Wertepaarmenge)

(3)

x	y
4	2
4	3

(Wertetabelle)

(4)



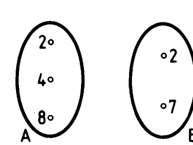
(Kartesischer Graph)

Definition:

Eine **Relation** ist eine Menge geordneter Paare.

Eine Relation zwischen den Mengen A, B ist beschreibbar durch eine Menge R geordneter Paare (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$. Ist $(x,y) \in R$, sagen wir: „Die Relation trifft auf das geordnete Paar zu“ und schreiben auch xRy.

1. Vorgelegt seien die Mengen $A = \{2, 4, 8\}$ und $B = \{2, 7\}$. Zwischen den Elementen $x \in A$ und $y \in B$ soll durch die Beziehung (Relationsvorschrift) „x ist größer als y“ eine Relation festgelegt werden.



a) Das nebenstehende Pfeildiagramm ist zu vervollständigen.

b) Die Relation R ist als Wertepaarmenge anzugeben.

c) Ist die Relation R eine Teilmenge der Produktmenge AxB?

2. Gegeben ist die Relationsvorschrift „Jeder natürlichen zweistelligen Zahl mit der Zehnerziffer 2, wird ein Bruch zugeordnet, dessen Zähler um 1 kleiner und dessen Nenner um 1 größer ist, als die gewählte natürliche Zahl“.

a) Es ist zu begründen, daß es sich bei dieser Relation um eine Funktion handelt.

b) Definitionsmenge D und Wertemenge W der Funktion sind im aufzählenden Verfahren anzugeben.

3. **a)** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$
$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$
Wie lautet die Relationsvorschrift?

b) A = {2, 4, 6, 8, 10}, B = {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100} (Pfeildiagramm)

Wie lautet die Relationsvorschrift?

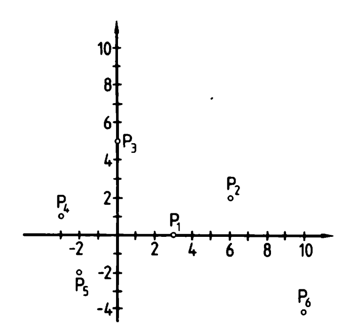
c) Welcher wesentliche Unterschied besteht zwischen den in **a)** und **b)** betrachteten Relationen?

4. Gegeben sind die Mengen $P = \{2, 3, 4, 5\}$ und $Q = \{-1, 0, 1, 3\}$. Gesucht ist die Relationsvorschrift der Form $y = ax + b$, die folgende Wertepaarmenge liefert:
a) $R = \{(2, -1), (3, 1), (4, 3)\}$ **b)** $R = \{(3, 3), (4, 0), (5, 1)\}$ **c)** $R = \{(2, 1), (3, 0), (4, -1)\}$

5. Text wie Aufgabe 4. für die Relationsvorschrift der Form $y = ax^2 + bx + c$:
$P = \{-1, 0, 1, 2\}$, $Q = \{-1, 0, 2, 3, 6\}$
a) $R = \{(0, 2), (1, 2), (2, 6)\}$ **b)** $R = \{(0, -1), (1, 2), (2, 3)\}$ **c)** $R = \{(-1, 3), (0, 0), (2, 0)\}$

6. Die durch den nebenstehenden kartesischen Graphen festgelegte Relation R soll **a)** mit einem Pfeildiagramm **b)** durch die Wertepaarmenge **c)** durch eine Wertetabelle dargestellt werden. **d)** Außerdem ist der kartesische Graph der „Umkehrrelation" R^{-1} zu konstruieren.

Bemerkung: Vertauscht man z.B. in der Relation $R = \{(1, 5), (3, 7)\}$ die Komponenten der geordneten Paare, so erhält man eine „neue" Relation $R^{-1} = \{(5, 1), (7, 3)\}$, die sogenannte **Umkehrrelation**. Diese entsteht also durch „Umdrehen" aller Wertepaare. Weiteres Beispiel: $R = \{(3, 8), (9, 7), (\triangle, \circ)\}$, $R^{-1} = \{(8, 3), (7, 9), (\circ, \triangle)\}$ usw.

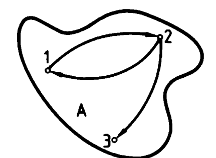


Definition:
Die **Umkehrrelation** $\mathbf{R^{-1}}$ der Relation $R \subseteqq A \times B$ ist die Menge
$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$
mit $R^{-1} \subseteqq B \times A$.

7. Vorgelegt ist die Relation $R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 4)\}$. Die Wertepaarmenge der Umkehrrelation ist anzugeben. Weiters ist zu überprüfen, ob R symmetrisch ist.
Anleitung: Wenn $R = R^{-1}$ gilt, nennt man R symmetrisch.

Definition:
Eine Relation R in einer Menge M heißt **symmetrisch**, wenn **für alle** $x, y \in M$ gilt: $xRy \Rightarrow yRx$.

8. Bislang haben wir uns mit Relationen beschäftigt, die **zwei** verschiedene Mengen A und B miteinander verknüpfen. Es gibt allerdings auch Relationen in **einer** Menge, d.h. $A = B$. Das nebenstehende Pfeildiagramm liefert eine Darstellung der Relation R in einer Menge. Ist R symmetrisch? (Begründung!)



9. Welche der nachstehenden Relationen R sind symmetrisch? (Begründung!)
a) $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 5\}$ in $A = \{x \mid x \in N \wedge x < 6\}$
b) $R = \{(b, c) \in N \times N \mid$ b geht in dieselbe Klasse wie c$\}$ in N = Menge aller Schüler einer Klasse.
c) $R = \{(u, w) \in W \times W \mid$ u liegt über w$\}$ in W = Menge von übereinander liegenden Büchern.

10. Text wie Aufgabe 9. für:
a) $R = \{(x, y) \in M \times M \mid$ x ist Bruder von y$\}$ in M = Menge der Brüder Dieter und Christoph.
b) $R = \{(z, \alpha) \in A \times A \mid z \cdot \alpha = 5\}$ in $A = \{x \mid x \in N \wedge x \leqq 8\}$
c) $R = \{(s, t) \in Z \times Z \mid s^t \leqq 16\}$ in $Z = \{1, 2, 3, 4\}$

11. Die Relation R in der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, Relationsvorschrift „x ist gleich y", soll durch ein Pfeildiagramm veranschaulicht werden. Weiters ist zu überprüfen, ob R reflexiv ist.
Anleitung: Von jedem Element beginnt ein Pfeil, der wieder in demselben Element endet („Ringpfeil"). Es ist festzustellen, ob für jedes $x \in M$ gilt: xRx

Definition:
Eine Relation R in einer Menge M heißt **reflexiv**, wenn **für alle** $x \in M$ gilt: xRx.

12. $R = \{(x, y) \in A \times A \mid$ x ist ein Teiler von y$\}$ mit $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Ist R reflexiv?

13. Welche der nachstehenden Relationen R sind reflexiv? (Begründung!)

a) $R = \{(x,y) \in X \times X \mid x$ unterrichtet an derselben Schule wie $y\}$ in X = Menge aller Lehrer der HTL-Spengergasse.

b) $R = \{(o,p) \in D \times D \mid o$ ist jünger als $p\}$ in D = Menge aller Einwohner der Stadt Villach.

c) $R = \{(r,s) \in E \times E \mid r$ schreibt einen Brief an $s\}$ in E = Menge aller Einwohner der Stadt St. Pölten.

14. Text wie Aufgabe **13.** für:

a) $R = \{(b,c) \in M \times M \mid b > c\}$ in $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

b) $R = \{(e,f) \in O \times O \mid e$ hat dieselben Eltern wie $f\}$ in O = Menge aller Einwohner eines Bundeslandes.

c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid x = 3y\}$

15. Wenn Robert (r) mit Konstantin (k) befreundet ist, und Konstantin mit Heidi (h) befreundet ist, dann kann es durchaus möglich sein, daß Robert mit Heidi spinnefeind ist. Aus „r ist Freund von k" und „k ist Freund von h" muß nicht „r ist Freund von h" folgen. Nehmen wir nun an, r ist größer als k und k ist größer als h. Folgt daraus, daß r größer als h ist? Anders gefragt:
Ist die Relation $R = \{(x,y) \in M \times M \mid x$ ist größer als $y\}$ mit $M = \{1{,}90;\ 1{,}74;\ 1{,}62\}$ transitiv?

> **Definition:**
> Eine Relation R in einer Menge M heißt **transitiv**, wenn **für alle** $x, y, z \in M$ gilt: aus xRy **und** $yRz \Rightarrow xRz$.

16. Die Relation R in der Menge {Anton, Christian, Gerald} mit der Relationsvorschrift „x ist verwandt mit y" ist transitiv. Begründung?

17. Welche der nachstehenden Relationen R sind transitiv? (Begründung!)

a) $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x$ ist ein Vielfaches von $y\}$

b) $\{(x,y) \in M \times M \mid x$ hat als Schwester $y\}$ in M = Menge der Personen einer Familie.

c) $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$

18. Text wie Aufgabe **17.** für:

a) $\{(y,z) \in S \times S \mid y$ ist parallel zu $z\}$ in S = Menge aller Geraden der Ebene.

b) $\{(x,y) \in M \times M \mid x$ ist Onkel von $y\}$ in M = Menge aller Österreicher.

c) $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y = 10\}$

19. Ist eine Relation R in einer Menge M symmetrisch, reflexiv und transitiv, so nennt man R eine **Äquivalenzrelation**. Welche der folgenden Relationen R sind Äquivalenzrelationen? (Begründung!)

a) $R = \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\}$ in der Menge der reellen Zahlen.

b) $R = \{(x,y) \in B \times B \mid x \leqq y\}$ in der Menge der natürlichen Zahlen.

c) $R = \{(x,y) \in S \times S \mid x$ geht in dieselbe Schule wie $y\}$ in S = Menge aller Schüler Österreichs.

d) $R = \{(a,b) \in A \times A \mid a$ ist kongruent zu $b\}$ in A = Menge aller Kreise in der Ebene.

e) $R = \{(m,n) \in Z \times Z \mid m$ ist Teiler von $n\}$ in der Menge der natürlichen Zahlen.

f) $R = \{(u,v) \in X \times X \mid u$ und v sind volumsgleich$\}$ in X = Menge aller Drehkegel.

g) $R = \{(x,y) \in M \times M \mid x$ und y haben dieselbe Einerstelle$\}$ in $M = \{1, 12, 22, 13, 73, 93, 44\}$.

h) $R = \{(x,y) \in M \times M \mid |x - y| \leqq 1\}$ in der Menge der natürlichen Zahlen.

20. Gegeben sind drei Relationen R_1, R_2, R_3 in der Menge $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) $R_1 = \{(x,y) \in A \times A \mid x \leqq y\}$

b) $R_2 = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4)\}$

c) $R_3 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,4), (3,1), (4,1), (4,2)\}$

Sind die nebenstehenden Relationen reflexiv, symmetrisch oder transitiv?
Falls keine Äquivalenzrelation vorliegt, sind die gegebenen Relationen derart zu ändern bzw. zu ergänzen, daß Äquivalenzrelationen entstehen.

7. Definitions- und Beweislehre, Deduktionsregeln

1. „Eine dreistellige Zahl ist durch drei teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch drei teilbar ist." Das ist also eine Behauptung, ein **Satz**, über natürliche Zahlen. Jede solche Behauptung bedarf eines **Beweises**, einer Argumentation, welche uns von der Richtigkeit überzeugt. Aber was lassen wir als Beweis gelten? Zunächst argumentieren wir anhand eines Beispiels:

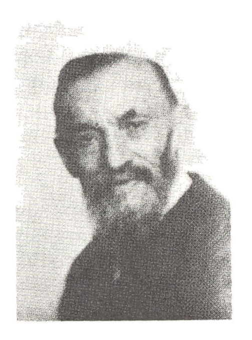
$$n = 237 = 200 + 30 + 7 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7 = 2(99 + 1) + 3(9 + 1) + 7 = \boxed{2 \cdot 99 + 3 \cdot 9} + 2 + 3 + 7$$

Wir versuchen nun durch drei zu dividieren. Die grün unterlegten Zahlen sind sicher durch drei teilbar, ergeben also den Rest Null. Daher ist die Summe (das ist die Zahl n) dann durch drei teilbar, wenn die Summe $2 + 3 + 7$ — also die Ziffernsumme — durch drei teilbar ist.

a) In analoger Weise ist dieser Beweis **allgemein**, d. h. für beliebige dreistellige Zahlen n zu führen.
Anleitung: $n = 100u + 10v + w = u \cdot 100 + v \cdot 10 + w$ usw.

b) Gilt dieser Satz auch für vierstellige Zahlen? (Beweis!)

Außer den Axiomen werden zum Aufbau der Mathematik noch **Definitionen** verwendet. Definitionen sind Begriffsbildungen, die der Abkürzung dienen. Definitionen sind ebenso wie Axiome unbeweisbar.



Der italienische Mathematiker **Guiseppe PEANO** (1858—1932) beschäftigte sich mit Problemen der Sprache und der Logik. Er unterrichtete an der Universität Turin und war Präsident der „Academia pro interlingua". Noch heute verbindet man seinen Namen mit dem Axiomensystem für die natürlichen Zahlen. Die Veröffentlichung der PEANO-Axiome erfolgte kurz vor der Jahrhundertwende und ihre Klarheit ist bestechend. (Vgl. Hauptspalte)

Was heißt nun eigentlich „beweisen"? Bei einem Beweis — man denke etwa an eine Gerichtsverhandlung — werden aus einzelnen Tatsachen logische Schlüsse abgeleitet. Als Ausgangspunkt dienen unbestrittene Tatsachen, also Aussagen, die man für wahr hält.

Im obigen Beweis haben wir den Begriff „natürliche Zahl" verwendet und vorausgesetzt, daß der Lernende diesen Begriff kennt. Genaugenommen müßte man diesen Begriff zuerst definieren. Wie geschieht das? Man definiert natürliche Zahlen — wie die „Gangart" der Schachfiguren — durch „Spielregeln", d. h. durch Sätze, die besagen, wie man mit ihnen rechnet. Solche Sätze nennt man **Axiome**.

Für Sätze über natürliche Zahlen hat Guiseppe PEANO (1858—1932) gezeigt, daß folgende Axiome günstig sind:

(1) 1 ist eine natürliche Zahl.

(2) Jede natürliche Zahl a hat einen Nachfolger $a|$.

(3) Für alle a, b gilt: $a| = b| \Rightarrow a = b$

(4) Für alle a gilt: $a| \neq 1$

(5) Jede Menge natürlicher Zahlen, die die Zahl 1 enthält und außerdem zu jeder Zahl ihren Nachfolger, ist mit der „Gesamtmenge" der natürlichen Zahlen identisch.

Bemerkung: Das letzte Axiom ist relativ schwer zu verstehen, es rechtfertigt den Schluß der vollständigen Induktion, auf den wir später noch zu sprechen kommen.

Einen Satz über natürliche Zahlen zu beweisen heißt, ihn durch logisch zulässige Schlüsse aus diesen Axiomen abzuleiten.

Die PEANO-Axiome geben in einfacher Weise eine Vorstellung von den natürlichen Zahlen wieder, sie scheinen uns unmittelbar einleuchtend. Sie dienen als **Fundament** für die ganze Theorie der natürlichen Zahlen (= Arithmetik und Zahlentheorie). Wir erkennen: die Axiome beschreiben vor allem **Beziehungen** zwischen natürlichen Zahlen. Ähnlich ist es in der Geometrie. Um dort einen geometrischen Satz zu beweisen, muß man nicht wissen, was **Punkte, Gerade und Ebenen sind**, sondern nur, was man mit ihnen tun **darf**.

2. Die Axiome (1) bis (5) des obigen Absatzes bilden ein sogenanntes **Axiomensystem**. Wir fordern von einem Axiomensystem folgende Eigenschaften:

(1) Die Axiome dürfen einander nicht widersprechen. (**Widerspruchsfreiheit**)

(2) Die Axiome müssen voneinander unabhängig sein. Mit anderen Worten: aus einem Axiom darf sich kein anderes Axiom herleiten lassen — sonst wäre es ja kein Axiom! (**Unabhängigkeit**)

(3) Die Axiome müssen so vollständig sein, daß das betreffende mathematische Gebiet mit ihnen alleine „aufgebaut" werden kann. (**Vollständigkeit**)

Nehmen wir an, auf **eine** der obigen drei Eigenschaften muß verzichtet werden. Welche erscheint am „entbehrlichsten"?

3. Unter **„Definiendum"** versteht man den in einer Definition zu definierenden Begriff; das, wodurch das Definiendum definiert wird, nennt man **„Definiens"**.

Z. B.: $\underbrace{\text{Äquivalenzrelationen}}_{\text{Definiendum}}$ sind $=$ $\underbrace{\text{Relationen, die symmetrisch, reflexiv und transitiv sind.}}_{\text{Definiens}}$

Bei den nachstehenden Definitionen sind Definiendum und Definiens zu kennzeichnen:

a) Zwei Mengen A und B sind gleich (geschrieben: $A = B$), wenn jedes Element von A auch Element von B ist und umgekehrt.

b) Die „Größe" einer Zahl unabhängig von ihrem Vorzeichen heißt Betrag oder Absolutwert der Zahl.

c) Die Bestimmung von Zwischenwerten einer Funktion aufgrund vorliegender Wertepaare nennt man Interpolation.

d) Unter der Länge eines Vektors versteht man die Länge eines (beliebigen) seiner Repräsentanten.

e) Potenzfunktionen sind Funktionen, die durch eine Funktionsgleichung $y = x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ dargestellt werden können.

f) $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$

g) Die Einheit der Frequenz heißt Hertz.

h) Einen Satz, der sich von seiner Struktur her als Definiendum = Definiens auffassen läßt, wollen wir als „logische Gleichung" bezeichnen.

Bemerkung: Die Gleichung Definiendum = Definiens gilt genaugenommen nur für **explizite Definitionen**. Viele Begriffe, vor allem die Grundbegriffe — wie z. B. das Wort „Menge" — werden implizit „definiert", indem man sagt, was man mit diesen Objekten **tun darf** und was **nicht**. In diesem Sinne ist die **implizite Definition** freilich ein Grenzfall; vielfach werden nur explizite Definitionen als echte Definitionen anerkannt.

4. Wann ist eine Definition eindeutig? Wann ist sie brauchbar? Diese Fragen sind allgemein nicht leicht zu beantworten. Bei den nachstehenden Formulierungen ist aber konkret zu entscheiden, ob die Definitionsversuche Fehler enthalten. Die Art des Fehlers ist allenfalls zu kennzeichnen!

a) Eine Menge ist eine Menge wohlunterscheidbarer Objekte.

b) Ein Trapez hat zwei parallele Seiten.

c) Eine natürliche Zahl größer 1 heißt Primzahl, wenn sie durch 1 und sich selbst teilbar ist.

d) Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie gerade ist.

e) Die Menge der reellen Zahlen ist die Vereinigung der Mengen aller rationalen und irrationalen Zahlen.

f) Eine Relation ist eine Teilmenge zweier Mengen.

g) Ein Strahl ist eine Gerade mit einem Endpunkt.

h) *„Durchmesser des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene und auf beiden Seiten durch den Umfang des Kreises begrenzte Gerade"* (Aus den Elementen des EUKLID).

5. Die fehlerhaften Definitionen in Aufgabe **4.** sind so umzugestalten, daß sie mathematisch exakt sind.

6. Man überprüfe die folgenden Formulierungen, ob sie Definitionen sind:

a) Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

b) Stimmen zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, so sind sie kongruent.

c) $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

d) Die graphische Veranschaulichung jeder Funktion $x \mapsto \frac{a}{x^n}$ $(a \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ liefert eine Hyperbel.

e) Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ heißt periodisch mit der Periode p, wenn für alle $x \in D$ gilt: $f(x) = f(x + p)$ mit $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $(x + p) \in D$.

f) $a^0 = 1$

g) 2 Vektoren stehen genau dann normal aufeinander, wenn ihr skalares Produkt 0 ergibt.

h) Eine Aussage ist ein Satz, von dem feststeht, daß er genau eines von beiden ist: wahr oder falsch.

Bemerkung: „3 + 2 = 5" ist eine wahre Aussage, „5 < 4" ist ein Beispiel für eine falsche Aussage. Die Beurteilung, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, erfordert oft beträchtliche Kenntnisse in den einzelnen Wissenschaften. Mitunter ist es überhaupt schwierig: „Er ist krank", „Dieses Verhalten ist normal" — was heißt „krank", was ist „normal"? Diese Sätze sind wohl nur in einem bestimmten Zusammenhang Aussagen.

7. In Aufgabe **6. h)** findet sich in der Definition des Begriffes Aussage das Wort „genau". Das ist ein gutes Beispiel, wie in der Mathematik ein einziges Wort sehr bedeutsam sein kann. Denn dieses **„genau eines"** bedeutet: nicht mehr und nicht weniger als eines trifft zu. Statt „genau eines" kann man auch sagen: „eines und nur eines". Ähnlich verhält es sich mit den Begriffen „notwendig" und „hinreichend" (vgl. die grün unterlegte Erklärung, rechts unten). In diesem Sinn ist der fehlende Text durch „genau", „notwendig" oder „hinreichend" entsprechend zu ergänzen, aber auch zu kennzeichnen, wenn keiner der gegebenen Begriffe sinnvoll ist.

a) Um die HTL-Matura zu machen, ist es ....., 5 Jahrgänge mit gutem Erfolg abzuschließen.

b) Um ein Dreieck zeichnen zu können, sind 3 Angaben ....

c) Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat über $\mathbb{C}$ ..... 2 Lösungen.

d) Um einen allgemeinen Winkel exakt zu dritteln, ist die Verwendung eines Zirkels ....

e) Eine Zahl heißt ..... dann rational, wenn sie sich in der Form $\frac{a}{b}$, $a, b \in Z$, $b \neq 0$ darstellen läßt.

f) Um eine Ebene festzulegen, sind mindestens 3 Punkte ....

g) Eine Aussage $A \wedge B$ ist ..... dann wahr, wenn A und B wahr sind.

h) Um ein Auto lenken zu dürfen, ist es ....., alle Vorschriften zu beachten.

Eine **notwendige Bedingung** bedeutet: die Aufgabe ist nur dann lösbar, wenn die Bedingung erfüllt wird. Ist die Bedingung erfüllt, so braucht die Aufgabe aber nicht lösbar sein.

Eine **hinreichende Bedingung** bedeutet: ist die Bedingung erfüllt, dann läßt sich die Aufgabe lösen. Die Aufgabe kann aber auch lösbar sein, wenn die Bedingung nicht erfüllt ist.

8. Es ist jeweils zu entscheiden, ob es sich um einen Satz oder um eine Definition handelt:

a) Ein Quadrat ist ein Rechteck mit gleich langen Seiten.

b) $a^2 + b^2 = c^2$

c) Parallele Geraden haben den gleichen Anstieg.

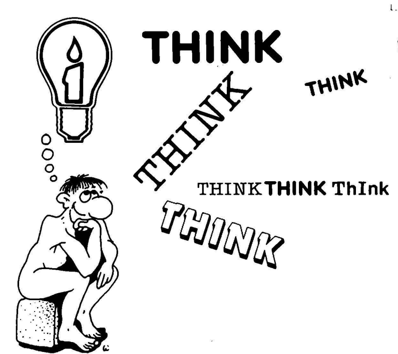
d) Das skalare Produkt zweier Vektoren ist kommutativ.

e) Eine linare Funktion ist eine Funktion der Form $x \mapsto kx + d$

f) Potenzen gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.

g) Kreisbewegung ist ein periodischer Vorgang.

h) Ein Punkt ist ein Winkel, dem man die beiden Schenkel ausgerissen hat.



9. Es gibt Aussagen, die scheinbar zugleich wahr und falsch sind. Solche Aussagen heißen **Paradoxien**. Einige Beispiele sollen das gleich verdeutlichen:

(1) Dieser Satz ist falsch.
Ist der obige Satz nun wahr oder falsch?

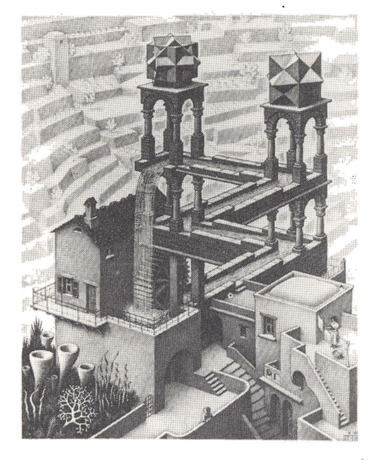
Wenn er wirklich falsch ist, ist er eigentlich wahr — und umgekehrt ...

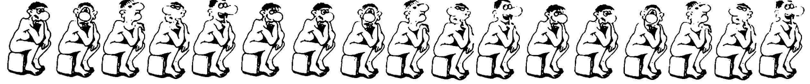
(2) *„PROTAGORAS lehrt einen Schüler die Rechte und trifft mit ihm die Verabredung, daß der Schüler die Studienkosten erst zu entrichten hat, nachdem er seinen ersten Prozeß gewonnen hat. Da er nach Abschluß seiner Studien keine Prozesse übernimmt, verklagt ihn P. schließlich auf Zahlung der Kosten. Er argumentiert: Gewinne ich den Prozeß, so erhalte ich mein Geld aufgrund des Urteilsspruches, verliere ich, so erhalte ich es aufgrund der früheren Verabredung. Der Schüler argumentiert umgekehrt, daß er die Studienkosten in keinem Fall zu zahlen braucht, entweder wegen der getroffenen Verabredung oder aufgrund des richterlichen Urteilsspruches“.*[1]

(3) Herr Mayer sagt: „Was Herr Müller sagt, ist wahr.“ Herr Müller sagt: „Was Herr Mayer sagt, ist falsch.“

a) Was ist an (3) paradox?

b) Wer findet weitere Beispiele?





Axiom —logischer Schluß→ **Satz** ist der Weg, den wir schon weiter oben beschrieben haben. Welche „logischen Schlüsse“ sind eigentlich zulässig? Mit anderen Worten: welche Beweisformen gibt es? Der in Aufgabe **1.** verlangte Beweis ist ein Beispiel für den sogenannten **direkten Beweis**. Andere Beweisformen sind der **indirekte Beweis** und der **Induktionsbeweis**. Dies soll Gegenstand der folgenden Aufgaben sein.

10. Die Zahlen 3 und 5 werden Primzahlzwillinge genannt, da es sich um Primzahlen handelt, deren Differenz zwei beträgt. Analog sind 5 und 7 bzw. 11 und 13 Primzahlzwillinge. Die Zahlen 3, 5, 7 sind sogar „Primzahldrillinge“, die Primzahlen a, b, c unterscheiden sich jeweils um zwei. Es ist ein direkter Beweis zu führen, daß 3, 5, 7 die **einzigen Primzahldrillinge** sind.

Anleitung: Die kleinste Primzahl — bezeichnen wir sie z. B. mit a — wird durch die Zahl 3 dividiert. Die Division darf nicht aufgehen (sonst wäre a ja keine Primzahl!), als Rest ergibt sich 1 oder 2. (Warum eigentlich nicht 3 oder 4?) Ist der Rest 1, so ist die um zwei größere Primzahl b durch 3 teilbar, ist der Rest 2, so ist die um 4 größere Primzahl c gleichfalls durch 3 teilbar usw.

11. a) Es ist zu zeigen, daß für $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ die Ungleichung $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ erfüllt ist.
(Arithmetisches Mittel $\geqq$ geometrisches Mittel)

b) Es ist zu zeigen, daß für $a > 0$ und $b > 0$ die Ungleichung $\frac{a+b}{2} > \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ erfüllt ist.
(Arithmetisches Mittel > harmonisches Mittel)

c) Es ist zu zeigen, daß zwischen je zwei rationalen Zahlen eine weitere rationale Zahl liegt.
Anleitung: Arithmetisches Mittel

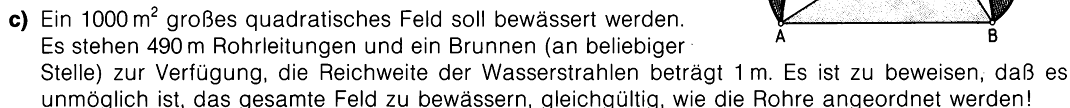
12. Es ist zu zeigen: **a)** $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ **b)** $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$ **c)** $\log a^b = b \log a$

[1]) Aus „Fritz REINHARDT/Heinrich SOEDER, dtv-Atlas zur Mathematik, Band 1“.

13. a) Beweis des **(1)** Höhensatzes **(2)** Kathetensatzes **(3)** Satzes von THALES?

b) Möndchen des HIPPOKRATES: Es ist zu zeigen, daß der Flächeninhalt der beiden „Möndchen" gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist.

c) Ein 1000 m^2 großes quadratisches Feld soll bewässert werden. Es stehen 490 m Rohrleitungen und ein Brunnen (an beliebiger Stelle) zur Verfügung, die Reichweite der Wasserstrahlen beträgt 1 m. Es ist zu beweisen, daß es unmöglich ist, das gesamte Feld zu bewässern, gleichgültig, wie die Rohre angeordnet werden!



14. Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte — auf einem separaten Blatt zu vervollständigen!



Problemstellung: Der Satz „$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl" soll mit der Schlußweise des **indirekten Beweises** bewiesen werden.

Problemstellung: Der Satz „$\sqrt{5}$ ist keine rationale Zahl" soll mit der Schlußweise des **indirekten Beweises** bewiesen werden.

Beispiel

Schlußweise des indirekten Beweises:

① Von der zu beweisenden Aussage A, geht man zu ihrer Negation (Verneinung) $\neg$A über.	A: Ist Bello ein Dackel, so ist er ein Säugetier. $\neg$A: Ist Bello ein Dackel, so ist er kein Säugetier.
② Man beweist, daß $\neg$A falsch ist.	$\neg$A ist falsch, da die Menge aller Dackeln eine Teilmenge aller Säugetiere ist.
③ Damit ist bewiesen, daß A richtig ist.	Daher muß Bello ein Säugetier sein.

A: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

① $\neg$ A: $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl

Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, kann sie als Bruch geschrieben werden: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$

Wir vereinbaren, daß der Bruch schon gekürzt ist, d. h. p und q sind zueinander teilerfremd. Wir quadrieren nun beide Seiten der Gleichung:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2$$

Wir erkennen: p^2 ist eine gerade Zahl. Daher muß auch p gerade sein. Wir stellen daher p durch 2a dar:

$$p = 2a \Leftrightarrow p^2 = 4a^2,\ 2q^2 = 4a^2 \quad |:2$$
$$q^2 = 2a^2$$

$\Rightarrow$ q ist gerade und kann durch 2b ersetzt werden: $q = 2b$

Somit gilt: $\sqrt{2} = \frac{2a}{2b}$

② Das steht jedoch im Widerspruch zu der Vereinbarung, daß der Bruch $\frac{p}{q}$ bereits gekürzt ist. Aus diesem Widerspruch können wir schließen: ③ **$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl!**

Wir erkennen: p^2 ist durch ..... teilbar. Daher ...

$\Rightarrow$ q ist ...

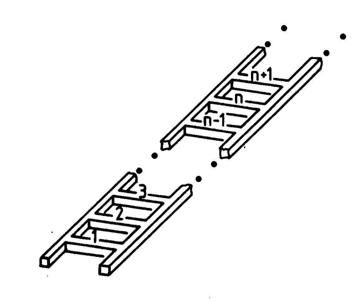
15. Man zeige: **a)** $^{10}\log 3$ ist irrational. **b)** $16n + 5$ ist keine Quadratzahl.
Anleitung: $16n + 5$ ist ungerade.

16. a) $\sqrt[3]{2}$ ist keine rationale Zahl. **b)** $\sqrt[5]{7}$ ist keine rationale Zahl. Beweis?

Hier eine Erklärung, wie eine Leiter zu besteigen ist:

1. Zunächst ist der Schritt auf die erste Sprosse zu klären.
2. Danach hat man den Schritt von einer Sprosse zur nächsten Sprosse zu verstehen.

Auf dieser Basis kann man auch eine sehr lange Leiter besteigen. Dies ist — auf die natürlichen Zahlen und eine „unendlich" lange Leiter bezogen — das **Prinzip der vollständigen Induktion (Induktionsbeweis).**



17. Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte — auf einem separaten Blatt zu vervollständigen!

Behauptung: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Induktionsbeweis?	**Behauptung:** $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=$ $=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Induktionsbeweis?

1. **Induktionsanfang:** Wir zeigen, daß die Formel für $n = 1$ richtig ist. (Schritt auf die erste Sprosse!)

$T_L(1) = 1$

$T_R(1) = \frac{1(1+1)}{2} \quad T_L = T_R \quad (w)$

2. **Induktionsschluß:** Wenn wir die Richtigkeit der Formel für ein **beliebiges** n voraussetzen und nun zeigen können, daß sie dann auch für n + 1 richtig ist, so ist (in Zusammenhang mit dem Induktionsanfang) die Allgemeingültigkeit der Aussage bewiesen. (Schritt von einer **beliebigen** Sprosse auf die nächsthöhere!)

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad |\cdot 2$$

$$n(n+1)+2(n+1)=(n+1)(n+2)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{n^2+3n+2=n^2+3n+2} \quad (w)$$

18. $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar.

19. $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$

20. $1+4+9+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

21. $1+8+27+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

22. $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$

Bemerkung: Wie kann man die Formel auch ohne vollständige Induktion beweisen?

23. Gesucht ist die Summenformel für $\sum_{k=1}^{n} 2k$ mit Beweis.

24. $\sum_{k=1}^{n} \sin kx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$

Anleitung: $\sin a\cdot\sin b=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\right)$

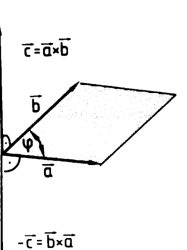
8. Vektorielles Produkt

Der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$[1] heißt **vektorielles Produkt** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und hat folgende Eigenschaften:

① $\vec{c}$ steht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normal.

② Der Betrag von $\vec{c}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$



③ Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Um dies festzustellen, verwendet man die **Rechtsschraubenregel**: Wird der Vektor $\vec{a}$ auf kürzestem Weg zum Vektor $\vec{b}$ gedreht, so würde sich eine Rechtsschraube dabei in Richtung $\vec{c}$ bewegen.

Berechnungsschema für das vektorielle Produkt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

1. Es ist das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zu berechnen:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -13 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$ **h)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix}$

2. Es ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms zu berechnen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. Es ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks zu berechnen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

[1]) gesprochen: a kreuz b.

4. a) Flächeninhalt des Parallelogramms [(A (5, − 4, − 2), B (2, 5, 11), C, D (− 4, 3, − 12)].

b) Flächeninhalt des Dreiecks [A (− 3, 8, 5), B (− 14, − 13, 6), C (4, 8, 14)].

c) Flächeninhalt des Trapezes [A (5, − 1, − 15), B (3, 7, 1), C, D (13, 0, 12)] mit c = 9.

d) Flächeninhalt der Raute [A (9, − 2, 12), B (5, − 15, − 4), C, D (13, 14, 25)].

5. Es sind für $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$ die nachstehenden Ausdrücke zu bilden.

a) $(3\vec{a}) \times \vec{b}$ **b)** $2(\vec{b} \times (3\vec{c}))$ **c)** $\vec{a} \times \vec{c}$ **d)** $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

e) $\vec{a} \times \vec{b}$ **f)** $\vec{b} \times \vec{a}$ **g)** $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ **h)** $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

6. a) Es ist zu zeigen, daß das vektorielle Produkt **antikommutativ** ist: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

b) Es ist zu zeigen, daß für das vektorielle Produkt das Assoziativgesetz **nicht** gilt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

c) Die JACOBIsche Identität ist zu beweisen: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{o}$

d) Es ist zu zeigen, daß $\vec{a} \times \vec{b}$ normal auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

Anleitung: Mittels skalarem Produkt.

7. Die fehlenden Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind so zu berechnen, daß $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ gilt.

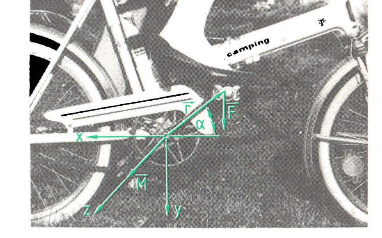
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}x_1\\4\\8\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}14\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}-44\\118\\-26\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\y_1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}x_2\\0\\z_2\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}x_2\\-1\\7\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}36\\-6\\-6\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}x_1\\5\\z_1\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}9\\y_2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\-27\\-42\end{pmatrix}$

8. Es ist das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (r = 23 cm) zu berechnen, das ein Radfahrer aufbringen kann (vgl. nebenstehende Figur).

a) $\alpha = 30°$, F = 300 N **b)** $\alpha = 45°$, F = 424 N **c)** $\alpha = \frac{\pi}{3}$, F = 500 N

Anleitung: [M] = 1 Nm



9. Das Drehmoment $\vec{M}$ einer Kraft $\vec{F}$ um einen Drehpunkt P ist durch $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ gegeben. $\vec{r}$ ist dabei der Vektor vom Drehpunkt P zum Angriffspunkt A der Kraft $\vec{F}$. Es ist das Drehmoment $\vec{M}$ zu berechnen.

a) P (0, 0, 0) m, A (2, 5, 14) m, $\vec{F} = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ N **b)** P (12, − 12, − 2) m, A (8, − 4, − 2) m, $\vec{F} = \begin{pmatrix}2\\5\\11\end{pmatrix}$ kN

c) P (− 4, 3, − 12) m, A (− 3, 8, 5) m, $\vec{F} = \begin{pmatrix}-14\\-13\\6\end{pmatrix}$ N **d)** P (4, 8, 14) m, A (5, − 1, − 15) m, $\vec{F} = \begin{pmatrix}-11\\-4\\10\end{pmatrix}$ N

10. Text wie Aufgabe **9.**, wobei das resultierende Moment zu berechnen ist:

a) P (− 1, − 14, 13) m, A_1 (0, 12, − 12) m, $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix}-3\\4\\-6\end{pmatrix}$ N A_2 (2, − 7, 7) m, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix}-7\\4\\11\end{pmatrix}$ N

b) P (− 5, 9, 4) m, A_1 (− 8, 6, − 3) m, $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix}11\\-13\\-10\end{pmatrix}$ kN A_2 (− 8, − 1, 14) m, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix}10\\5\\-5\end{pmatrix}$ kN

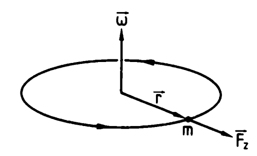
c) P (− 10, − 5, 12) m, A_1 (9, − 14, − 14) m, $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix}-11\\8\\-5\end{pmatrix}$ N

A_2 (− 10, − 1, − 1) m, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix}-12\\1\\2\end{pmatrix}$ N A_3 (− 7, − 1, − 6) m, $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix}-12\\-5\\8\end{pmatrix}$ N

d) P (10, − 5, − 11) m, A_1 (3, − 8, 4) m, $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix}-7\\4\\6\end{pmatrix}$ N

A_2 (− 11, 4, 12) m, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix}12\\10\\-5\end{pmatrix}$ N A_3 (− 14, − 12, 2) m, $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix}9\\11\\-1\end{pmatrix}$ N

11. Für die Zentrifugalkraft gilt: $\vec{F}_z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$



$\vec{\omega}$ ..... Winkelgeschwindigkeitsvektor der Drehung

$\vec{F}_z$ ..... Zentrifugalkraft (Fliehkraft)

m ..... Masse

$\vec{r}$ ..... Abstandsvektor der Drehachse zur Masse m

Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte auf einem separaten Blatt — zu vervollständigen:

Ein Körper mit der Masse m = 12 kg befindet sich momentan im Punkt A (2, 3, 6) und dreht sich mit 900 U/min um den Ursprung. Der Vektor $\vec{\omega}$ liegt zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ parallel und weist in dieselbe Richtung.
$\vec{F}_z$ und $|\vec{F}_z|$ sind zu berechnen.

Um den Punkt M (2, 3, 7) rotiert ein Körper mit einer Masse m = 2 kg mit 810 U/min. Er befindet sich momentan im Punkt A (0, 2, 12). Drehachse und Drehsinn sind durch den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.
$\vec{F}_z$ und $|\vec{F}_z|$ sind zu berechnen.

Wir bestimmen zunächst den Vektor $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Betrag von $\vec{\omega}$ ergibt sich aus der Drehzahl
(ω wird in rad/s angegeben)

$$\omega = \frac{900 \cdot 2\pi}{60} = 30\pi$$

Der Einheitsvektor in Richtung $\vec{\omega}$ lautet:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \ldots = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{a}_0 = 30\pi \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 6\pi\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Für die Zentrifugalkraft gilt: $\vec{F}_z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = 6\pi\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 6\pi\begin{pmatrix} -12 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -12(6\pi)^2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -12 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_z = -432\pi^2\begin{pmatrix} 40 \\ -75 \\ -30 \end{pmatrix} = 2160\pi^2\begin{pmatrix} -8 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Betrag von $\vec{F}_z$ ergibt sich aus:

$$|\vec{F}_z| = 2160\pi^2\sqrt{8^2 + 15^2 + 6^2} = 384{,}3 \cdot 10^3$$

$$\mathbf{|\vec{F}_z| = 384{,}3\,kN}$$

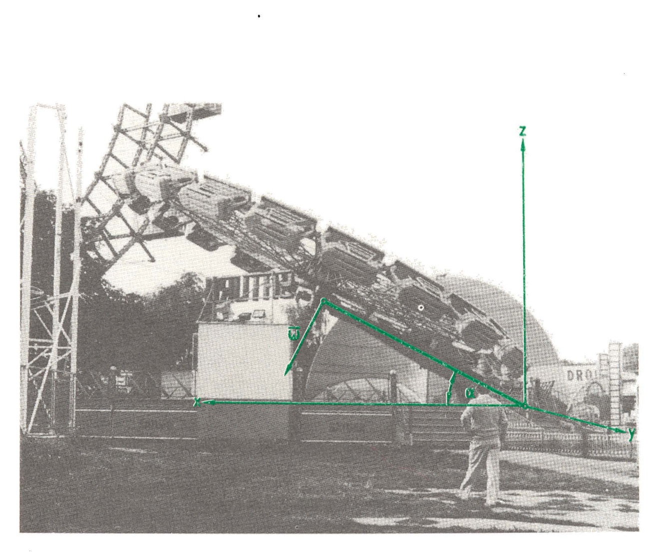
12. Um die Achse a [A (6, 5, 0) cm, B (4, − 3, 6) cm] dreht sich ein Körper K mit der Masse m = 24 kg. Seine Entfernung von A beträgt 11 cm, von B 9 cm. Wie groß ist die Fliehkraft $\vec{F}_z$ bei einer Drehzahl von 260 U/min?

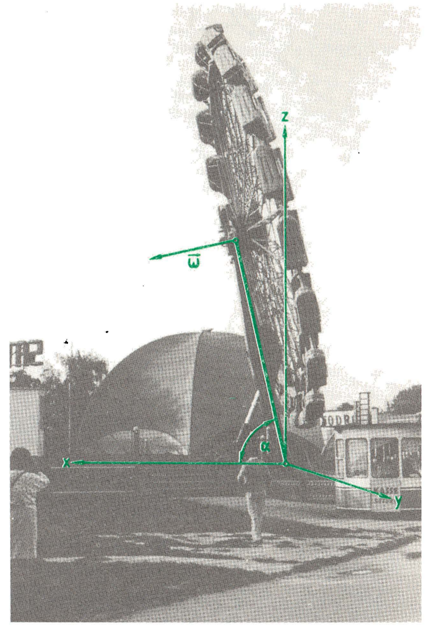
Anleitung: Aus dem Dreieck ABK ist der Abstand r des Körpers von der Achse a zu berechnen. $\vec{r}$ ist dann ein Normalvektor auf a mit der Länge r.

13. In welche Richtung zeigt die Zentrifugalkraft $\vec{F}_z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$?

14. Wie groß ist die Zentrifugalkraft auf einen Menschen mit m = 70 kg aufgrund der Erddrehung an einem Ort mit der geographischen Breite **a)** 0° (Äquator), **b)** 23,5° (Wendekreis) **c)** 48,2° (Wien) **d)** 46,6° (Klagenfurt)? Um wieviel wird er dadurch leichter? (Erdradius r_E = 6378 km, Erdbeschleunigung g = 9,81 m/s^2, Gewicht: $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$, $\vec{g}$ zum Erdmittelpunkt gerichtet)

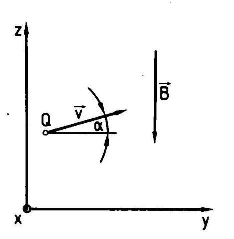
15. Der „Saturn" (vgl. nachstehende Fotos), steht in der xy-Ebene, der Arm bewegt sich in der xz-Ebene. Es ist der Ausdruck für den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ in Abhängigkeit des Winkels α gesucht. $|\vec{\omega}|$ = 40 U/min!





16. Bewegt sich ein elektrisch geladenes Teilchen mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch ein Magnetfeld $\vec{B}$, so erfährt es die sogenannte **LORENTZkraft** $\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$, wobei Q die Ladung des Teilchens ist. Das Magnetfeld ist durch den Vektor $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}$ T und die Ladung Q = 0,3 C gegeben.

Wie groß ist die LORENTZkraft für:



a) α = 0°, $|\vec{v}|$ = 2 m/s

b) α = 30°, $|\vec{v}|$ = 5 m/s

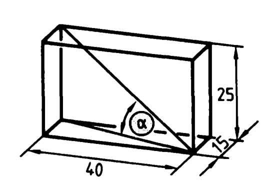
c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$ m/s

d) α = 90°, $|\vec{v}|$ = 10 km/h

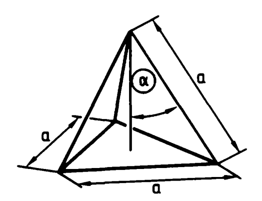
Bemerkung: [B] = 1 T, [Q] = 1 C; T..... Tesla, C..... Coulomb.

17. Mit Hilfe des vektoriellen Produktes sind die grün eingezeichneten Winkel zu berechnen:

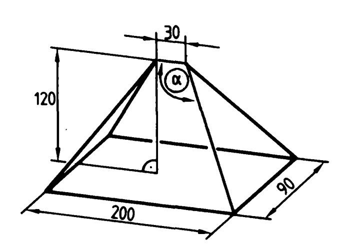
a)



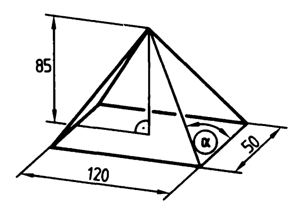
b)



c)



d)



18. Es ist das Volumen des geraden vierseitigen Prismas mit den Kanten $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ zu berechnen:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -14 \\ 15 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Aufgaben **19.** bis **23.** untersuchen die Eigenschaften des vektoriellen Produktes näher.

19. Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte auf einem separaten Blatt — zu vervollständigen:

Es ist der Betrag von $\vec{a} \times \vec{b}$ (d. h. der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms) unter Verwendung des skalaren Produktes zu berechnen:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zuerst wird der Betrag berechnet:

$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$	$\lvert\vec{a}\rvert =$
$\lvert\vec{b}\rvert = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$	$\lvert\vec{b}\rvert =$

Der Winkel zwischen den Vektoren wird mit Hilfe des skalaren Produktes bestimmt:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	$\vec{a} \cdot \vec{b} =$
$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \lvert\vec{b}\rvert}$	$\cos\varphi =$
$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$	$\varphi =$

19. (Fortsetzung)

Die Höhe des Parallelogramms ergibt sich aus:

$h_a = \|\vec{b}\| \cdot \sin\varphi$	$h =$

und damit die Fläche:

$A = \|\vec{a}\| \cdot h$	$A =$

20. Es ist $|\vec{a} \times \vec{b}|$ mit Hilfe des **(1)** vektoriellen Produkts **(2)** skalaren Produkts zu berechnen:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -14 \\ 13 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

21. Es ist zu zeigen:

a) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$

b) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$

c) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

d) Aus $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ ist $\vec{x}$ nicht eindeutig zu bestimmen.

> Für die Basisvektoren $\vec{i}, \vec{j}$ und $\vec{k}$ des kartesischen Koordinatensystems gelten folgende Zusammenhänge:
>
> (4) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}$
>
> (5) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$
>
> Weiters gelten für das vektorielle Produkt noch folgende Rechenregeln:
>
> (6) $c(\vec{a} \times \vec{b}) = c \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times c\vec{b}$
>
> (7) Distributivgesetz bezüglich Vektoraddition:
>
> $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$
>
> $(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b} \times \vec{a}) + (\vec{c} \times \vec{a})$

22. Es ist zu überprüfen, ob (4) und (5) den Regeln (1), (2) und (3) entsprechen.

23. Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ soll mittels (1) bis (7) berechnet werden. (Ohne Rechenschema!)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix}$

Wir schreiben die Vektoren in Komponentendarstellung an:

$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$	$\vec{a} =$ $\vec{b} =$

Das Produkt wird angeschrieben:

$(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$	

23. (Fortsetzung)

Jetzt wird unter Berücksichtigung der Reihenfolge ausmultipliziert:

$$x_1\vec{i} \times x_2\vec{i} + x_1\vec{i} \times y_2\vec{j} + x_1\vec{i} \times z_2\vec{k} +$$
$$+ y_1\vec{j} \times x_2\vec{i} + y_1\vec{j} \times y_2\vec{j} + y_1\vec{j} \times z_2\vec{k} +$$
$$+ z_1\vec{k} \times x_2\vec{i} + z_1\vec{k} \times y_2\vec{j} + z_1\vec{k} \times z_2\vec{k}$$

Wir wenden (6) an:

$$x_1x_2(\vec{i} \times \vec{i}) + x_1y_2(\vec{i} \times \vec{j}) + x_1z_2(\vec{i} \times \vec{k}) +$$
$$+ y_1x_2(\vec{j} \times \vec{i}) + y_1y_2(\vec{j} \times \vec{j}) + y_1z_2(\vec{j} \times \vec{k}) +$$
$$+ z_1x_2(\vec{k} \times \vec{i}) + z_1y_2(\vec{k} \times \vec{j}) + z_1z_2(\vec{k} \times \vec{k})$$

Unter Verwendung der Beziehungen (4) und (5) ergibt sich:

$$x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} =$$
$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

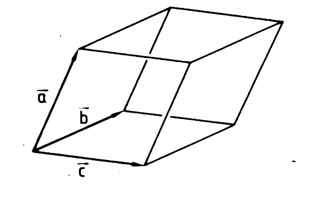
in Koordinatendarstellung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ -(x_1z_2 - x_2z_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix} =$$

Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ spannen ein sogenanntes **Parallelepiped** auf. Sein Volumen V läßt sich folgendermaßen berechnen:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$



Den Ausdruck $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ nennt man **Spatprodukt („boxproduct“)**.

24. Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte auf einem separaten Blatt — zu vervollständigen:

Es ist das Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds zu berechnen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

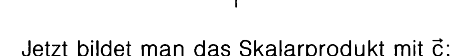
Für das Volumen des Parallelepipeds gilt:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

24. (Fortsetzung)

Wir berechnen zuerst das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}$$



Jetzt bildet man das Skalarprodukt mit $\vec{c}$:

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = |-14 + 10 - 40|$$

Das Volumen ist damit

$$V = 44$$

25. Es ist das Spatprodukt zu berechnen:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -11 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

26. Es ist das Volumen des Parallelepipeds zu berechnen:

a) [A (− 9, − 19, − 22), B (2, − 8, 3), C (− 22, − 18, − 6), D, E (− 11, − 4, 14), F, G, H]

b) [A (− 15, − 6, 8), B, C, D (− 15, 23, 22), E (− 11, − 7, − 14), F (24, − 8, 2), G, H]

c) [A, B (25, 18, 6), C (− 17, 1, 23), D (− 21, 0, − 20), E, F, G, H (20, 4, − 8)]

d) [A, B, C, D (9, − 3, 11), E (− 12, 11, − 7), F (9, − 17, 15), G, H (− 8, 13, − 10)]

27. Gesucht ist das Volumen der Pyramide mit einem Parallelogramm als Grundfläche:

a) [A (− 16, − 20, − 16), B (20, 4, 21), C, D (− 20, − 13, − 14), S (6, 24, − 1)]

b) [A, B (9, − 6, − 8), C (7, 2, − 4), D (− 9, − 19, 7), S (− 5, 20, 4)]

c) [A (− 13, − 9, 23), B (22, − 11, − 7), C (− 14, − 24, − 8), D, S (2, 25, 18)]

d) [A (− 17, − 21, 0), B (− 20, 4, 9), C (11, 11, − 7), D, S (− 15, − 10, 21)]

Anleitung: Das Volumen der Pyramide ist ein Drittel des umschriebenen Parallelepipeds.

28. Gesucht ist die Oberfläche der nachstehenden Körper:

a) Parallelepiped lt. Aufgabe **26. a)**.

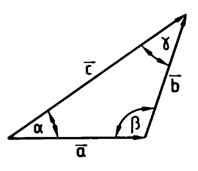
b) Parallelepiped lt. Aufgabe **26. d)**.

c) Pyramide lt. Aufgabe **27. b)**.

d) Pyramide lt. Aufgabe **27. c)**.

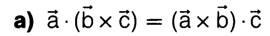
29. Mit Hilfe des vektoriellen Produkts ist der Sinussatz herzuleiten. Ausgangspunkt bildet das nebenstehende Vektordreieck: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Anleitung: Man multipliziere die Gleichung vektoriell mit $\vec{a}$.





30. Nachstehende Identitäten sind zu überprüfen:



a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$

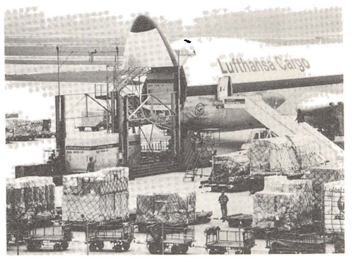
c) Zusammenhang zwischen vektoriellem und skalarem Produkt
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$

9. Umfangreichere Fragestellungen aus Technik und Arbeitswelt

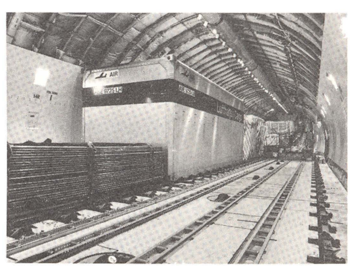
1. Luftfracht — Container

Die Luftfracht ist die schnellste Art, Güter zu befördern. Großen Frachtmengen stehen eigene Cargo-Jets oder Verkehrsflugzeuge mit entsprechenden Laderäumen zur Verfügung. Um das Verladen zu beschleunigen, verwendet man Paletten oder spezielle Container.

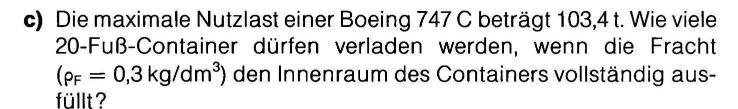
Für Flugzeuge der Typen Boeing 747 C und 747 SL eignet sich der „20-Fuß-Container" (vgl. nebenstehendes Foto).



a) Welches Volumen V_1 nimmt dieser Container ein? (Abmessungen: 6100 × 2440 × 2440 mm)

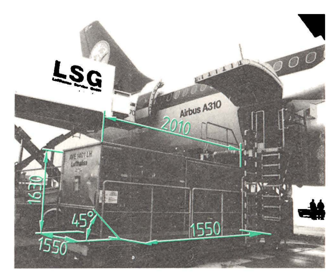


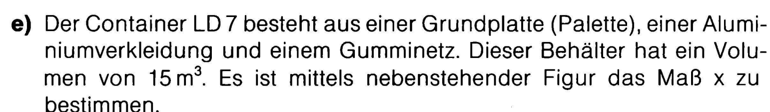
b) Die inneren Abmessungen des Containers sind 5939 × 2290 × 2302 mm, seine Eigenmasse beträgt 997 kg. Wie groß ist die mittlere Dichte ρ_c des Containermaterials?



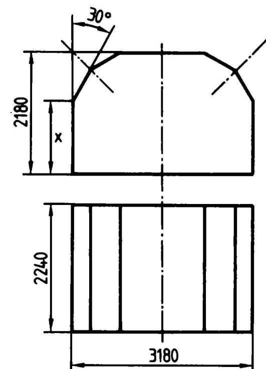
c) Die maximale Nutzlast einer Boeing 747 C beträgt 103,4 t. Wie viele 20-Fuß-Container dürfen verladen werden, wenn die Fracht ($\rho_F = 0{,}3$ kg/dm^3) den Innenraum des Containers vollständig ausfüllt?

d) Der Container LD 3 entspricht etwa den Konturen des unteren Laderaumes (Airbus A 310). Dadurch wird der vorhandene Platz besser ausgenützt. Welches Volumen V_2 (vgl. nebenstehendes Foto) beansprucht dieser Container?





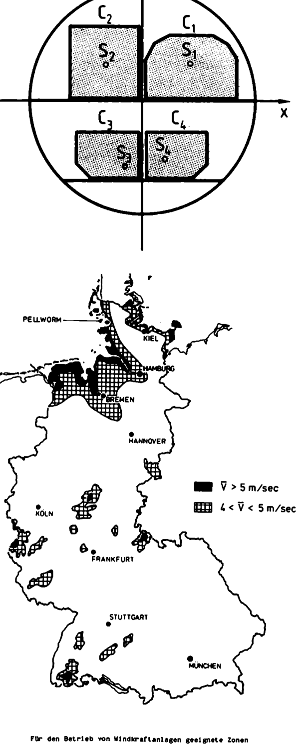
e) Der Container LD 7 besteht aus einer Grundplatte (Palette), einer Aluminiumverkleidung und einem Gumminetz. Dieser Behälter hat ein Volumen von 15 m^3. Es ist mittels nebenstehender Figur das Maß x zu bestimmen.





Das Foto zeigt die Verladung von Containern in den unteren Frachtraum eines Lufthansa-Airbus A 310.

f) Im Laderaum eines Cargo-Jets befinden sich die Container C_1, C_2, C_3 und C_4. Aus diesem Grund liegt der Schwerpunkt S des Flugzeugs nicht mehr im Ursprung des xy-Koordinatensystems (vgl. nebenstehende Figur). Der Schwerpunkt S des **beladenen** Flugzeugs ist aus den Schwerpunkten und Massen der einzelnen Container zu berechnen:



Für den Betrieb von Windkraftanlagen geeignete Zonen

Container	Schwerpunkt	Masse
C_1	$S_1(1550, 1230)$	$m_1 = 4{,}2$ t
C_2	$S_2(-1230, 1220)$	$m_2 = 5{,}9$ t
C_3	$S_3(-610, -2170)$	$m_3 = 980$ kg
C_4	$S_4(750, -1980)$	$m_4 = 1{,}3$ t

Anleitung: Die Schwerpunkte $S_1, \ldots, S_4$ befinden sich in der xy-Ebene. Der Ortsvektor $\overrightarrow{0S}$ des Schwerpunkts S ist das **gewogene arithmetische Mittel** der Ortsvektoren $\overrightarrow{0S_1}, \ldots, \overrightarrow{0S_4}$. Die zugehörigen Gewichtsfaktoren sind die relativen Anteile an der Gesamtmasse $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.



2. Windkraftanlagen

Als Standort für Windkraftanlagen ist unter anderem die nordfriesische Insel Pellworm geeignet. Sie liegt in einer besonders windgünstigen Zone des Küstenvorfeldes der Nordsee und hat keine nennenswerten Erhebungen.

Die nebenstehende Tabelle zeigt eine Serie von Windmessungen, die sich über den Juni 1981 erstreckte.

a) Es ist ein Histogramm für die einzelnen mittleren Windgeschwindigkeiten anzufertigen. Wie groß war die Anzahl der völlig windstillen „10-min-Intervalle"?

Bemerkung: Die Messung erfolgte **kontinuierlich** unter Verwendung von Meteorologischen Meßmasten.

b) Wie groß war die mittlere Windgeschwindigkeit $\bar{v}$?

Windgeschwindigkeitsbereich in m/s	Mittelwert der Windgeschwindigkeit v_i in m/s	Anzahl der 10-min-Mittelwerte
0—1	0,5	7
1—2	1,5	66
2—3	2,5	310
3—4	3,5	405
4—5	4,5	427
5—6	5,5	343
6—7	6,5	374
7—8	7,5	417
8—9	8,5	516
9—10	9,5	417
10—11	10,5	163
11—12	11,5	85
12—13	12,5	64
13—14	13,5	46
14—15	14,5	43
15—16	15,5	28
		$\Sigma 3711$

2. (Fortsetzung)

Zur gleichen Zeit wurden zwei Windkraftanlagen (WINDMATIC und AEROMAN) getestet.
Die Aufgaben **c)** bis **f)** sind für beide Anlagen zu lösen.

c) Es ist die Leistung P in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit v graphisch darzustellen (vgl. nebenstehende Tabelle). Beide Graphen sind in ein Schaubild einzutragen.

d) Ist die Funktion

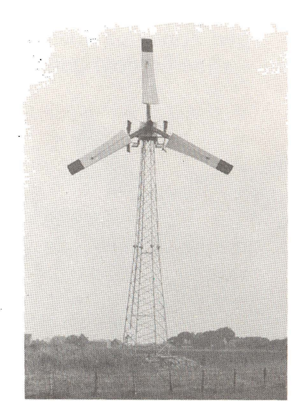
$$P(v) = \frac{P_M P_0 e^{\lambda v}}{P_0 - P_M + P_M e^{\lambda v}} - P_V \text{ für } v \geqq v_A$$

ein brauchbarer Ersatz für die nebenstehende Wertetabelle? Die Werte der verwendeten Parameter sind nachstehender Tabelle zu entnehmen:

Mittelwert der Windgeschwindigkeit v in m/s	Anzahl der 10-min-Mittelwerte	Mittlere Leistung P in kW	
		WINDMATIC	AEROMAN
0,5	7	0,00	0,00
1,5	66	0,00	0,00
2,5	310	0,00	0,17
3,5	405	0,00	0,50
4,5	427	0,00	1,06
5,5	343	0,42	1,59
6,5	374	2,03	2,84
7,5	417	4,60	4,85
8,5	516	8,30	7,13
9,5	417	11,22	8,81
10,5	163	14,79	10,10
11,5	85	17,30	10,45
12,5	64	19,30	11,03
13,5	46	21,74	11,08
14,5	43	22,94	11,11
15,5	28	23,01	11,07
	Σ3711		

	WINDMATIC	AEROMAN
P_M	0,045 kW	0,32 kW
P_0	24 kW	12 kW
P_V	1 kW	1 kW
λ	0,63 s/m	0,48 s/m
v_A	5 m/s	2,5 m/s

Es sind die Abweichungen von den einzelnen Meßpunkten in Prozenten anzugeben.

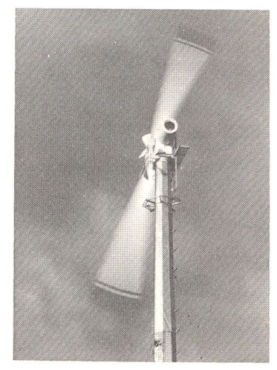


e) Es ist die mittlere Leistung $\bar{P}$ für Juni 1981 zu ermitteln. Warum ist die mittlere Leistung $\bar{P}$ nicht identisch mit der Leistung bei der mittleren Windgeschwindigkeit $\bar{v}$?

f) Wie groß ist die Standardabweichung s der Leistung P und ihr sogenannter **Variationskoeffizient** $V = \frac{s}{\bar{P}}$?

Anleitung: Nehmen wir an, die Standardabweichung der Massen in der Menge von Elefanten eines Zoos beträgt 2 Tonnen, die bei Mäusen hingegen nur 40 dag. In welchem Fall ist die Streuung größer?

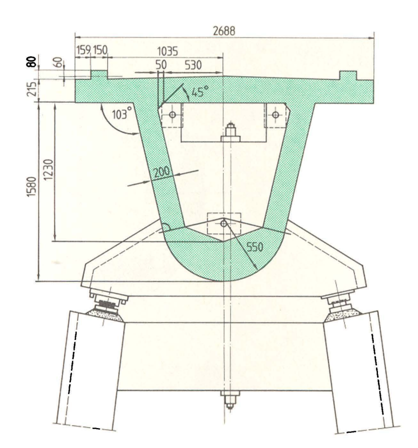
Wir erkennen: Die Standabweichung s sagt für sich allein nicht viel aus. Anschaulicher wird es, wenn man s im Verhältnis zum arithmetischen Mittel setzt. Mit anderen Worten: das arithmetische Mittel sind 100%, wieviel Prozent macht die Standardabweichung aus? Hiefür wird der Variationskoeffizient herangezogen ...

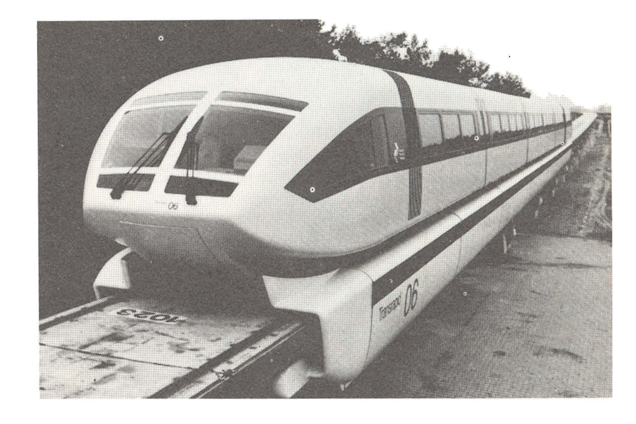


3. Magnetschwebebahn

Die nachstehende Figur zeigt den Querschnitt eines Fahrwegträgers einer Magnetschwebebahn.

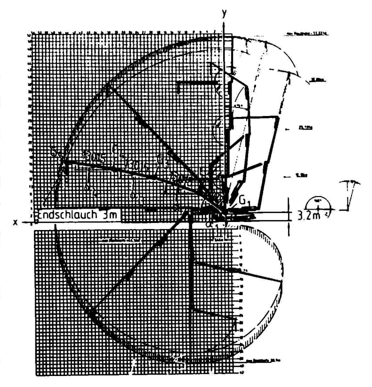
Es soll seine Querschnittsfläche (grün unterlegt) berechnet werden.





4. Betonpumpen

Auf schwer zugänglichen Baustellen, wo Beton benötigt wird, sind Betonpumpen unersetzlich geworden: Der Fertigbeton wird in Transportern zur Baustelle gebracht und in eine Betonpumpe gefüllt. Diese fördert den Beton durch einen Schlauch entlang eines viergliedrigen Armes an die zu betonierende Stelle. Um mit dem Endschlauch an diese Stelle zu gelangen, müssen die 4 Armteile in entsprechende Stellungen gebracht werden. Dabei schließen die Armteile mit der Waagrechten jeweils die Winkel α_1, α_2, α_3 und α_4 (vom Fahrzeug ausgehend gezählt) ein. ($\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ werden **hier** im mathematisch negativen Sinn angenommen.) Zur Vereinfachung ersetzen wir den Arm durch aneinandergereihte Strecken.

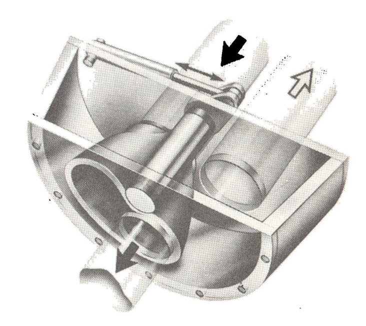


a) Es sind die Koordinaten des Schlauchendes $E(x_E, y_E)$ in Abhängigkeit von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und α_4 anzugeben. (Koordinatensystem vgl. nebenstehende Figur)

b) Wie lauten die Koordinaten der Gelenke $G_1, \ldots, G_5$ und des Schlauchendes E für $\alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = 75°$, $\alpha_3 = 45°$ und $\alpha_4 = 18°$?

c) Die ersten zwei Armteile stehen senkrecht. Wie groß müssen α_3 und α_4 sein, damit das Schlauchende E den Punkt $P(10, 30)$ erreicht?

Anleitung: $\triangle G_3G_4G_5$ ist gleichschenkelig.



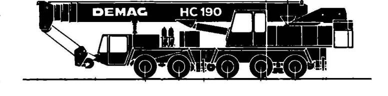
d) Der Arm hat die Stellung aus Aufgabe **b)**. Der Winkel α_2 sinkt um 1°/s, α_3 sinkt um 3°/s und α_4 sinkt um 4,8°/s. Welche Koordinaten hat das Schlauchende nach 15 s?

e) Die Pumpe fördert pro Stunde höchstens 116 m³ Beton. Mit welcher Geschwindigkeit v fließt dieser durch einen Schlauch mit einem Durchmesser d = 125 mm?

f) Wie lange dauert das Betonieren 5 zylindrischer Pfeiler mit je 450 mm Durchmesser und 4,5 m Höhe?

5. Teleskopkräne

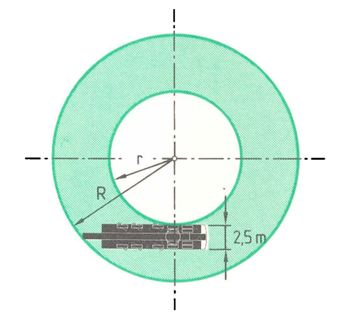
Teleskopkräne sind schnell einsatzbereit, da sie ihre gesamte Ausrüstung mit sich führen.



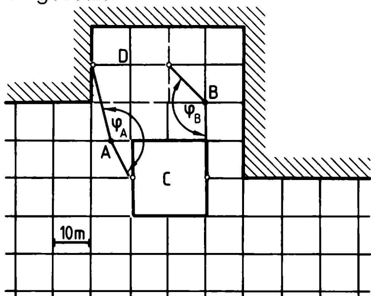
a) Der Kurvenradius des nebenstehenden Krans beträgt $r = 7{,}3$ m. Das Ende des Auslegers beschreibt einen Kreis mit dem Radius $R = 14$ m.

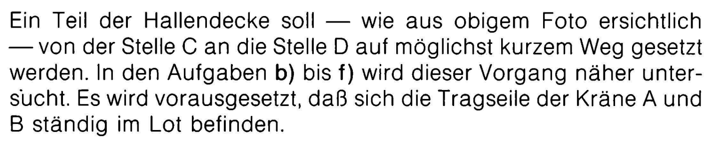
(1) Wie groß ist die Fläche, die der Kran bei einer Wende um 360° überstreicht?

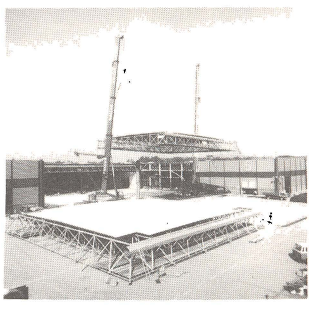
(2) Wie breit muß eine Straße mindestens sein, damit man mit dem Kran auf ihr um 180° wenden kann?



Beim Bau einer Fabrikshalle werden zwei Teleskopkräne A und B eingesetzt:



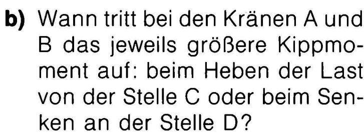




Ein Teil der Hallendecke soll — wie aus obigem Foto ersichtlich — von der Stelle C an die Stelle D auf möglichst kurzem Weg gesetzt werden. In den Aufgaben **b)** bis **f)** wird dieser Vorgang näher untersucht. Es wird vorausgesetzt, daß sich die Tragseile der Kräne A und B ständig im Lot befinden.

b) Wann tritt bei den Kränen A und B das jeweils größere Kippmoment auf: beim Heben der Last von der Stelle C oder beim Senken an der Stelle D?

Anleitung: Kippmoment = Last · Normalabstand. Jeder Kran trägt immer die Hälfte der Gesamtlast.



c) Die Hauptausleger der Kräne A bzw. B sind 37 m lang. Welche Neigungswinkel δ_A bzw. δ_B haben die Ausleger während des Hebens der Last (Stelle C)?

d) Welche Neigungswinkel δ_A bzw. δ_B haben die Ausleger während des Senkens der Last (Stelle D)?

e) Wie groß sind die Winkel φ_A bzw. φ_B, um die sich die Kräne jeweils drehen?

f) Die Tragfähigkeit (das ist die maximale hebbare Last bei einer bestimmten Ausladung und Länge des Hauptauslegers) der Kräne A bzw. B ist in nebenstehender Tabelle zu finden. Mit ihrer Hilfe soll die maximale Masse des zu versetzenden Dachteiles bestimmt werden. Es ist dabei jene maximale Ausladung zu verwenden, bei der das größte Kippmoment auftritt (vgl. Aufgabe **b)**).

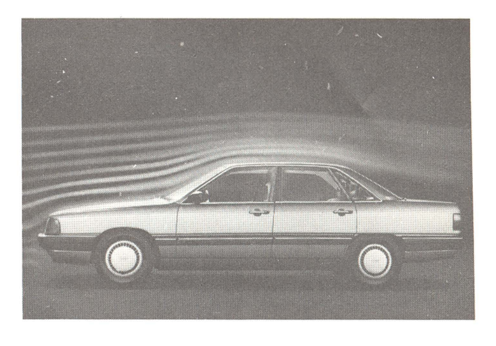
TRAGFÄHIGKEITEN IN t AM HAUPTAUSLEGER

Ausladung in m	Länge des Hauptauslegers			
	10,9 m	19,6 m	28,3 m	37 m
3	80,0	—	—	—
3,5	70,0	—	—	—
4	63,0	—	—	—
4,5	57,0	45,0	—	—
5	52,5	41,5	—	—
6	42,5	36,5	23,0	—
7	34,2	32,0	21,0	14,0
8	27,5	27,4	18,8	13,8
9	22,8	22,7	17,0	13,2
10	—	19,2	15,5	12,5
12	—	14,4	13,0	11,0
14	—	11,3	11,0	9,7
16	—	9,1	9,0	8,4
18	—	7,5	7,3	7,2
20	—	—	6,1	6,0
22	—	—	5,1	5,0
24	—	—	4,3	4,2
26	—	—	3,6	3,5
28	—	—	—	2,9
30	—	—	—	2,5
32	—	—	—	2,0
34	—	—	—	1,6
36	—	—	—	—
38	—	—	—	—

6. Fahrzeugaerodynamik

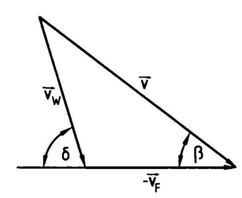
Um den Benzinverbrauch von PKWs zu senken, geben immer mehr Hersteller ihren Autos eine aerodynamisch günstige Form. Diese verringert den sogenannten **Luftwiderstand**, der die durch die Luftverdrängung verursachte auf das Fahrzeug wirkende Kraft ist.

Er hängt von der resultierenden Anströmgeschwindigkeit $\vec{v}$, der Luftdichte ρ_L, der Querschnittsfläche A des Fahrzeugs und dessen Karosserieform (Luftwiderstandsbeiwert c_W) ab.



Die Einflüsse des Luftstromes auf das Kfz sind äußerst kompliziert und kaum zu berechnen. Ohne Windkanalversuche ist eine windschnittige Karosserie heute nicht möglich.

a)



Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ setzt sich aus der Fahrgeschwindigkeit $\vec{v}_F$ und der Windkomponente $\vec{v}_W$ zusammen.

Es ist das Schaubild von $|\vec{v}|$ für $\delta \in [0°, 180°]$, bei $|\vec{v}_W| = 40$ km/h und $|\vec{v}_F| = 100$ km/h anzufertigen.

Für welchen Winkel δ gilt $|\vec{v}| = |\vec{v}_F|$? (Graphische und rechnerische Lösung.)

b) Der neue VW-Scooter mit einer Frontfläche von $A = 1{,}44\,m^2$ — eine Designstudie von VW — hat eine außergewöhnliche Windschnittigkeit: Der Luftwiderstandsbeiwert beträgt $c_w = 0{,}25$ (bei normalen PKWs: $c_w \geqq 0{,}3$). Es ist die Kurve des Luftwiderstandes $F_L(v)$ für eine Höchstgeschwindigkeit von $v_{max} = 160$ km/h (Ausführung mit einer Motorleistung P = 29 kW) zu zeichnen: $F_L(v) = c_w \cdot A \cdot \rho_L \cdot \frac{v^2}{2}$

Bemerkung: Für den Standardtag mit der Temperatur von 15° C und dem Luftdruck von 1013 mbar ergibt sich für $\rho_L = 1{,}225\,kg/m^3$.



c) Eine zweite bremsende Kraft, die auf das Fahrzeug wirkt, ist der Rollwiderstand F_R, welcher linear mit der Geschwindigkeit wächst: $F_R(v) = k \cdot v$. Es ist F_R und k für die Ausführung in Aufgabe **b)** zu berechnen, wenn für die Leistung gilt: $P = (F_L + F_R) \cdot v_{max}$.

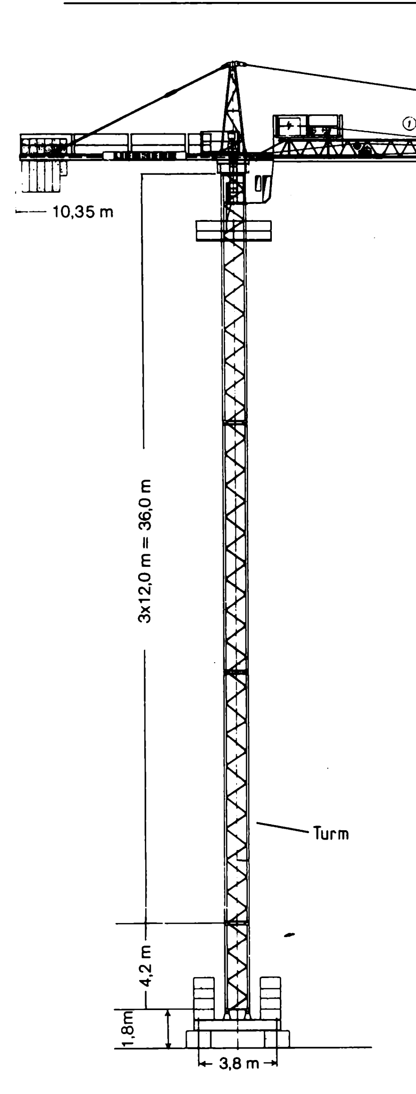
d) Für die Konstante k aus Aufgabe **c)** ist die maximale Geschwindigkeit für eine Ausführung mit einer Motorleistung P = 66 kW zeichnerisch zu bestimmen.

e) Um wieviel Prozent p nimmt die erforderliche Motorleistung **(1)** P = 29 kW **(2)** P = 66 kW zu, wenn die Höchstgeschwindigkeit um 10% gesteigert wird?

f) Die Funktion des Luftwiderstandes in Abhängigkeit der Zeit ist für die gleichmäßige Beschleunigungsphase 0—100 km/h in 15 s anzugeben und zu zeichnen. Wie groß ist der Leistungsbedarf zu einem bestimmten Zeitpunkt?

Anleitung: $v = a \cdot t$

Etwas an diesem Fahrzeug weckt sofort die Neugier des Betrachters: das obige Foto zeigt nämlich eine Dreirad-Konstruktion mit zwei angetriebenen Vorderrädern und einem Hinterrad an einer „Einarmschwinge" wie sie auch im Motorradbau zu finden ist.
Das Motorrad hat überhaupt Pate gestanden, denn seine wirtschaftliche Leistungskraft mit dem sportlichen Komfort eines Autos zu verbinden — das war die grundlegende Vorstellung der Ingenieure dieser interessanten Designstudie.



7. Turmdrehkran

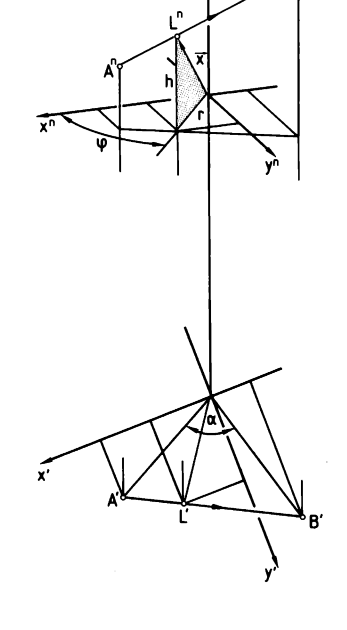
Mit dem nebenstehenden Turmdrehkran soll eine Last L von Punkt A (32, 9, 14) zu Punkt B (− 8, 39, 34) befördert werden.

Um einige geometrische Überlegungen anzustellen, denken wir uns den Kran in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gestellt. (Alle Bemaßungen in m!)

a) **(1)** Um wieviel Meter wird die Last L gehoben?

(2) Welchen Weg legt die Laufkatze **auf dem Ausleger** zurück, und in welcher Richtung bewegt sie sich auf ihm?

(3) Um welchen Winkel α dreht sich der Ausleger?

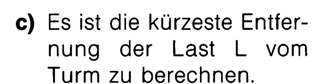


Die Last L soll von A **geradlinig** und **gleichförmig** in 50 s nach B befördert werden.

b) Um die drei unabhängigen Kranbewegungen (Heben, Ausfahren, Drehen) entsprechend zu steuern, sind sie als Funktion der Zeit t (in s) anzugeben: h (t), r (t), φ (t).

Weiters sind ihre Graphen für $t \in [0, 50]$ zu zeichnen.

Anleitung:
$\vec{x} = \overrightarrow{0L} = \overrightarrow{0A} + \frac{t}{50}\overrightarrow{AB}$. Der Vektor $\vec{x}$ ist in seine kartesischen Komponenten zu zerlegen.



c) Es ist die kürzeste Entfernung der Last L vom Turm zu berechnen.

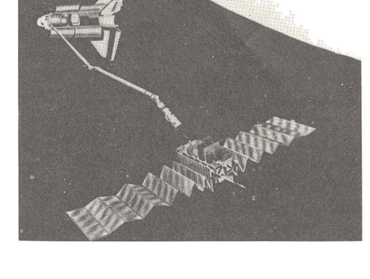
d) Zu welchen Zeitpunkten ist die Laufkatze 30 m vom Turm entfernt?
Anleitung: r (t) = 30 ...

e) Welchen Weg legt die Last L von A nach B zurück, wenn zuerst gedreht, dann ausgefahren und schließlich gehoben wird?

f) Zusätzlich zu den bestehenden Punkten soll die Stelle C (− 48, 11, 2) erreicht werden. Um welchen Vektor $\vec{k}$ ist der Kran zu verschieben, damit er zu allen drei Punkten die gleiche Entfernung hat?

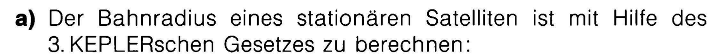
Ist die Auslegerlänge von 42 m hiefür ausreichend?

8. Satelliten



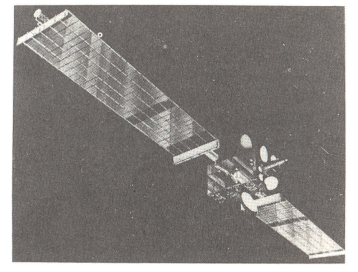
In der heutigen Zeit erfüllen Satelliten sehr viele Funktionen, die uns bereits selbstverständlich geworden sind: Übertragen von TV- und Rundfunksendungen, Herstellen von Telefonverbindungen, Erforschen des Weltalls, Verbreitung von Nachrichten usw. Um diese Aufgaben problemlos zu bewältigen, sind sogenannte **stationäre Satelliten** erforderlich. Das sind Satelliten, denen jeweils eine fixe Position gegenüber der Erdoberfläche zugewiesen wird.

a) Der Bahnradius eines stationären Satelliten ist mit Hilfe des 3. KEPLERschen Gesetzes zu berechnen:



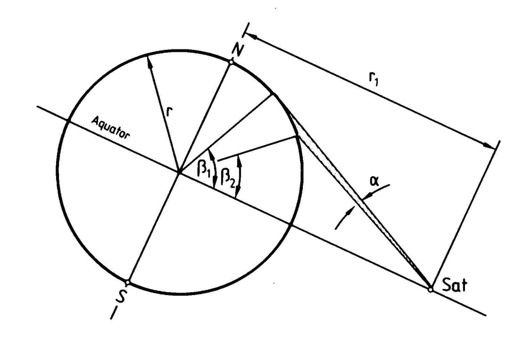
$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$, dabei sind die Variablen folgendermaßen zu wählen:

$T_1 = 1$ Tag ..... Umlaufzeit des Satelliten um die Erde
$T_2 = 27{,}3$ Tage ..... Umlaufzeit des Mondes um die Erde
r_1 ..... mittlerer Bahnradius des Satelliten
$r_2 = 3{,}844 \cdot 10^5$ km ..... mittlerer Bahnradius des Mondes



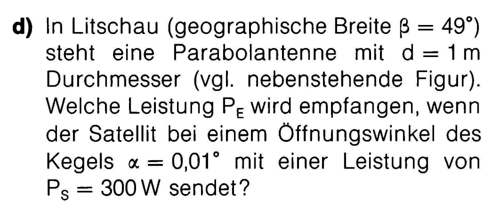
26 m Spannweite erreichen die Solarflügel des nebenstehenden Satelliten „L-Sat". Auf 60 cm² sind 43000 Solarzellen verteilt, die den Erdtrabanten ständig mit einer elektrischen Leistung von 5 kW versorgen.

b) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit des Satelliten auf seiner Bahn um die Erde?



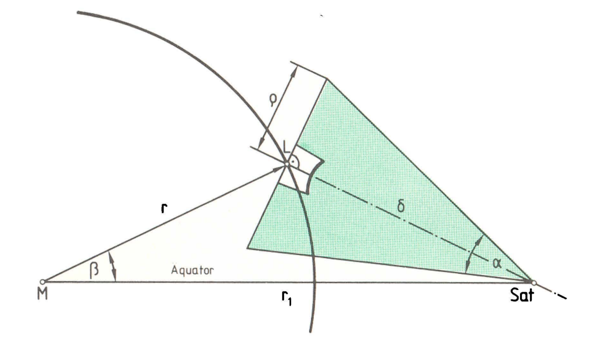
Ein Satellit „steht" über dem Äquator und sendet kegelförmig elektromagnetische Wellen zur Erde ($r = 6370$ km). Da die Entfernung zwischen Empfänger und Satellit minimal sein soll, wurde dieser in eine Position manövriert, in der die Achse des Sendekegels (Drehkegels!) die Erdachse schneidet.

c) Welchen Öffnungswinkel α muß dieser Kegel mindestens haben, wenn ein Gebiet in Mitteleuropa zwischen den geographischen Breiten $\beta_1 = 50°$ (Prag oder Frankfurt a. M.) und $\beta_2 = 46°$ (Laibach) im Sendebereich des Satelliten liegen soll?

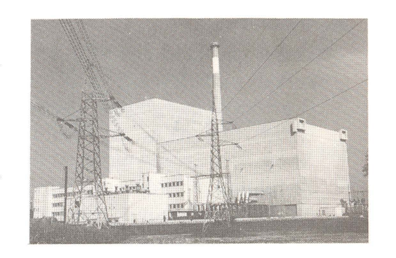


d) In Litschau (geographische Breite $\beta = 49°$) steht eine Parabolantenne mit $d = 1$ m Durchmesser (vgl. nebenstehende Figur). Welche Leistung P_E wird empfangen, wenn der Satellit bei einem Öffnungswinkel des Kegels $\alpha = 0{,}01°$ mit einer Leistung von $P_S = 300$ W sendet?

Anleitung: Die empfangene Leistung ist zum Flächeninhalt der jeweiligen Antenne proportional. $P_S : P_E = \rho^2\pi : \frac{d^2\pi}{4}$

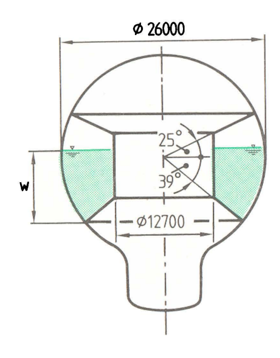


9. Kernkraftwerk Zwentendorf[1] (Modell)



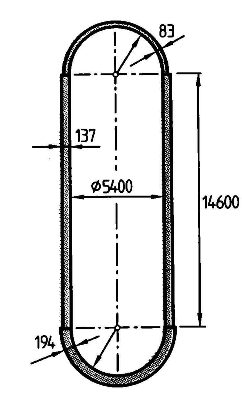
Die Kerntechnik hat die Aufgabe, die durch Spaltung von Atomkernen freiwerdende Energie den Konsumenten in Form von Wärme oder Elektrizität zur Verfügung zu stellen.

Das Kernkraftwerk Zwentendorf bestand im wesentlichen aus einem Siedewasserreaktor (vgl. nachstehende Figur) und dem Turbinen-Generator-Satz. Im Siedewasserreaktor entsteht Wasserdampf, welcher zur Erzeugung von Elektrizität genutzt wird.

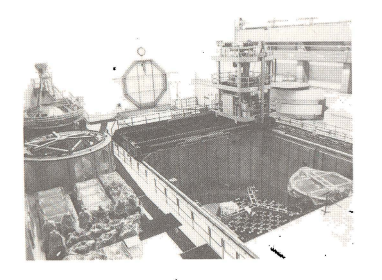


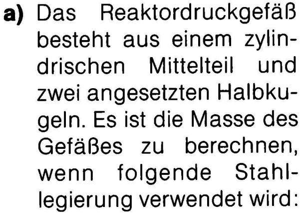
Sicherheitsbehälter

Siedewasserreaktor



Reaktordruckgefäß

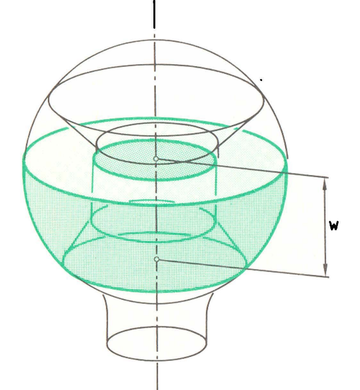




a) Das Reaktordruckgefäß besteht aus einem zylindrischen Mittelteil und zwei angesetzten Halbkugeln. Es ist die Masse des Gefäßes zu berechnen, wenn folgende Stahllegierung verwendet wird:

40% Fe, 37% Cr, 22% Ni, 1% Mo

Chemisches Element	Dichte ρ in g/cm³
Chrom (Cr)	6,92
Eisen (Fe)	7,85
Molybdän (Mo)	10,20
Nickel (Ni)	8,80



b) Im Sicherheitsbehälter befindet sich ringförmig um das Reaktordruckgefäß die sogenannte Kondensationskammer. In diese kann im Störfall der Wasserdampf aus dem Druckgefäß eingeleitet werden, um eine Überhitzung zu vermeiden. Im Normalfall ist die Kondensationskammer zur Hälfte mit Wasser gefüllt. Es ist die Wassermenge zu berechnen.

c) Wie hoch ist der Wasserstand w im Normalfall?

---

[1]) Bedingt durch die folgenschweren und unabsehbaren biologischen Auswirkungen bei Unfällen mit spaltbarem Material hat die weltweite Akzeptanz von Atomkraftwerken drastisch abgenommen. Eine Ersatzenergiequelle ist nicht in Sicht.